

Auxiliar 4

24 de abril de 2019

P1. Sean $Y \leq X$ y $Z \leq X^*$ subespacios del normado X y su dual X^* , respectivamente. Recordemos la definición de aniquilador:

$$Y^\perp = \{x^* \in X^* \mid x^*(y) = 0 \ \forall y \in Y\}$$

$${}^\perp Z = \{x \in X \mid z(x) = 0 \ \forall z \in Z\}$$

Pruebe que ${}^\perp(Y^\perp) = \overline{Y}$.

Sol. Sea $y \in Y$ y $x^* \in Y^\perp$. Entonces $x^*(y) = 0$. Luego, $Y \subseteq {}^\perp(Y^\perp)$. Como este último conjunto es cerrado (ver auxiliar pasado), entonces de hecho se tiene $\overline{Y} \subseteq {}^\perp(Y^\perp)$. Para la otra inclusión razonamos por contradicción: supongamos que existe $z \in {}^\perp(Y^\perp) \setminus \overline{Y}$. Por el teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar $x^* \in X^*$ tal que x^* se anula en el convexo cerrado $\overline{Y}$ pero $x^*(z) \neq 0$. Pero entonces la primera condición implica que $x^* \in Y^\perp$, por lo que $0 \neq x^*(z) = 0$.

P2. Sea X normado.

- Pruebe que si X es reflexivo, entonces X^* también lo es.
- Sea $Y \leq X$ subespacio cerrado del reflexivo X . Pruebe que Y es reflexivo.
- Concluya que si X es reflexivo si, y sólo si X^* es reflexivo.

Sol. Primero partimos con una definición general. Sea $T: X \rightarrow Y$ una función lineal continua. Definimos su adjunta como

$$T^*: Y^* \rightarrow X^*$$

$$y^* \mapsto (T^*y^*)(x) = y^*(T(x)) \quad \text{i.e. } T^*y^* = y^* \circ T$$

Como T es lineal continua, T^*y^* es composición de lineales continuas, por lo que efectivamente es un elemento de X^* . Probaremos algunas propiedades de T^* :

- $\|T\| = \|T^*\|$. En efecto, podemos calcular:

$$\|T^*\| = \sup_{y^* \in Y^*} \frac{\|T^*y^*\|}{\|y^*\|} = \sup_{y^* \in Y^*} \sup_{x \in X} \frac{|T^*y^*(x)|}{\|y^*\| \|x\|} = \sup_{x \in X} \sup_{y^* \in Y^*} \frac{|y^*(Tx)|}{\|y^*\| \|x\|} = \sup_{x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$$

donde en la penúltima igualdad usamos Hahn-Banach.

- $\ker T = {}^\perp(\text{Im } T^*)$. Notemos que $x \in \ker T$ ssi $T(x) = 0$ ssi $\forall y^* \in Y^*, y^*(Tx) = 0$ ssi $\forall y^* \in Y^*, (T^*y^*)(x) = 0$ ssi $\forall x^* \in \text{Im } T^*, x^*(x) = 0$ ssi $x \in {}^\perp(\text{Im } T^*)$.
- $\ker T^* = (\text{Im } T)^\perp$. Esto es similar al punto anterior.

Antes de ir al problema, recordemos la definición de la inyección al doble dual:

$$i_X: X \rightarrow X^{**}$$

$$x \mapsto i_X(x)(x^*) = x^*(x)$$

i_X es una isometría. X se dice reflexivo si i_X es sobreyectiva o, equivalentemente, si i_X es un isomorfismo isométrico.

a) Supongamos que X es reflexivo. Basta probar que la composición

$$X^{***} \xrightarrow{i_X^*} X^* \xrightarrow{i_{X^*}} X^{***}$$

es el mapeo identidad (pues así i_{X^*} será sobreyectiva). Sea $x^{***} \in X^{***}$ y $x^{**} \in X^{**}$. Como i_X es sobreyectiva, podemos tomar $x \in X$ tal que $i_X(x) = x^{**}$. Calculamos:

$$\begin{aligned} i_{X^*}(i_X^*(x^{***}))(x^{**}) &= x^{**}(i_X^*(x^{***})) = i_X(x)(i_X^*(x^{***})) \\ &= i_X^*(x^{***})(x) = x^{***}(i_X(x)) = x^{***}(x^{**}) \end{aligned}$$

Es decir, $i_{X^*}(i_X^*(x^{***})) = x^{***}$. Notemos que de esto sigue que, de hecho, la inversa de i_{X^*} es i_X^* .

b) Sea X reflexivo e $Y \leq X$ subespacio cerrado. Primero mostraremos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & X^{**} \\ j \uparrow & & \uparrow j^{**} \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & Y^{**} \end{array}$$

En efecto: si $y \in Y$ y $x^* \in X^*$, entonces:

$$j^{**}(i_Y(y))(x^*) = i_Y(y)(j^*(x^*)) = j^*(x^*)(y) = x^*(j(y)) = i_Y(j(y))(x^*)$$

Ahora notemos que si $Z \leq X^*$, entonces ${}^\perp Z \xrightarrow{i_X} Z^\perp$ define un isomorfismo: por un lado, como i_X es sobreyectiva,

$$\begin{aligned} i_X({}^\perp Z) &= \{i_X(x) \mid x \in X, \forall z \in Z : z(x) = 0\} \\ &= \{x^{**} \in X^{**} \mid \forall z \in Z : x^{**}(z) = 0\} \end{aligned}$$

y por otro lado, i_X es inyectiva, por lo que su restricción a ${}^\perp Z$ también lo es.

Así, obtenemos un isomorfismo

$$\{0\} = \text{Ker } j = {}^\perp \text{Im } j^* \xrightarrow{i_X} (\text{Im } j^*)^\perp = \text{Ker } j^{**} \quad (\triangle)$$

Se sigue de esto que j^{**} es inyectiva. Mirando ahora el diagrama de arriba podemos notar que i_Y es sobreyectiva si, y sólo si $i_X(j(Y)) = j^{**}(Y^{**})$. Para probar la segunda condición partimos notando que, como X^* es reflexivo, i_{X^*} es sobreyectiva, por lo que tenemos un isomorfismo similar al de $(\triangle)$:

$$(\text{Im } j)^\perp = \text{Ker } j^* = {}^\perp \text{Im } j^{**} \xrightarrow{i_{X^*}} (\text{Im } j^{**})^\perp = \text{Ker } j^{***} \quad (\square)$$

En (a) probamos que i_X^* es la inversa de i_{X^*} . Usando esto y las fórmulas para los duales de cuocientes vistas auxiliar pasado reescribimos $(\square)$ como

$$(X/\text{Im } j)^* = (\text{Im } j)^\perp = \text{Ker } j^* \xleftarrow{i_X^*} (\text{Im } j^{**})^\perp = (X^{**}/\text{Im } j^{**})^* \quad (\Theta_1)$$

Ahora, como $i_X(j(Y)) \leq j^{**}(Y^{**})$, i_X induce un mapeo

$$X/\text{Im } j \xrightarrow{i_X} X^{**}/\text{Im } j^{**} \quad (\Theta_2)$$

Usando la fórmula 2. (probada al inicio de la P2) en los mapeos (Θ_1) y (Θ_2) deducimos que (Θ_2) es inyectiva (esto sale sólo de que (Θ_1) es sobreyectiva). Esto implica que $i_X(\text{Im } j) \subseteq \text{Im } j^{**}$, que es justamente lo que buscábamos.

P3. Sea $0 < p < 1$ y $X = L^p([0, 1])$. Demuestre que $X^* = \{0\}$.

Sol. A X le damos la topología inducida por la métrica

$$d(f, g) = \|f - g\|_p = \int |f - g|^p d\mu$$

Sea $\ell \in X^*$, $f \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como ℓ es continua, podemos tomar $r > 0$ tal que $\ell(B(0, r)) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ (donde $B(0, r) \subseteq X$ es la bola de centro 0 y radio r). Sea $n \in \mathbb{N}$ tan grande como para que $n^{p-1}\|f\|_p < r$. Elegimos una partición $(A_j)_{j=1}^n$ de $[0, 1]$ tal que

$$\int_{A_j} |f|^p d\mu = \frac{1}{n} \|f\|_p^p$$

Ponemos ahora $g_j = n \cdot f 1_{A_j}$ y notemos que $\|g_j\|_p n^{p-1} \|f\|_p < r$, por lo que $|\ell(g_j)| < \varepsilon$. Como $f = \frac{1}{n} \sum_j g_j$, podemos calcular:

$$|\ell(f)| = \left| \ell \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j \right) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\ell(g_j)| < \varepsilon$$

Como el ε elegido fue arbitrario, se sigue que $\ell(f) = 0$, con lo que $\ell = 0$.

P4. Pruebe que en $\ell^1(\mathbb{N})$ una sucesión converge en norma si, y sólo si converge débilmente.