Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA4401-1 Procesos de Markov
11 de Julio de 2019

Auxiliar Examen #2 Pauta

Profesor: Raúl Gouet B.
Auxiliar: Matías Romero Y.

P1. Sea $Z = (Z_n)_{0\leq n\leq N}$ un proceso adaptado e integrable y definamos $U = (U_n)_{0\leq n\leq N}$ mediante la recursión inversa:

$$U_N := Z_N, \quad U_n := \max\{Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)\}.$$

El proceso U es llamado la envoltura de Snell del proceso Z.

(a) Demuestre que U es una supermartingala.

(b) Muestre que $Z \leq U$ y que si V es otra supermartingala tal que $Z \leq V$ entonces $U \leq V$. En otras palabras U es la supermartingala más pequeña que domina a Z.

(c) Definamos:

$$\nu_0 := \inf\{n \geq 0 : U_n = Z_n\}.$$

Muestre que ν_0 es un tiempo de parada, y que el proceso detenido U^{ν_0} es una martingala.

(d) Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los tiempos de parada a valores en $\{0, \dots, N\}$. Muestre que el tiempo de parada ν_0 resuelve el problema:

$$\sup_{\nu\in\mathcal{T}} \mathbb{E}(Z_\nu),$$

es decir, ν_0 es el tiempo de parada óptimo para la esperanza de Z.

Demostración:

(a) Verificamos las tres condiciones para U:

- **Adaptado**, pues $Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ son $\mathcal{F}_n$-medibles y máximo de funciones medibles es medible.
- **Integrable:** Como los Z_n son integrables, $U_N = Z_N$ lo es y U_n también, pues

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|U_n|) &\leq \mathbb{E}(|Z_n|) + \mathbb{E}(|\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)|)\\ &\leq \mathbb{E}(|Z_n|) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(|U_{n+1}||\mathcal{F}_n))\\ &= \mathbb{E}(|Z_n|) + \mathbb{E}(|U_{n+1}|)\\ &\leq \sum_{k=n}^{N} \mathbb{E}(|Z_k|) < \infty\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad viene de Jensen, y la última se obtiene iterando el argumento anterior.
- **Supermartingala:** $\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq \max\{Z_n, \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)\} = U_n$.

(b) Claramente $Z_n \leq U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos ahora una supermartingala V que domine a Z y probemos inductivamente que

$$U_{N-i} \leq V_{N-i},\ \forall\, i = 0, \dots, N$$

C.B: $V_N \geq Z_N = U_N$.
P.I:

$$\begin{aligned}U_{N-i-1} &= \max\{Z_{N-i}, \mathbb{E}(U_{N-i}|\mathcal{F}_{N-i-1})\}\\ &\leq \max\{Z_{N-i}, \mathbb{E}(V_{N-i}|\mathcal{F}_{N-i-1})\}\\ &\leq \max\{Z_{N-i}, V_{N-i-1}\}\\ &= V_{N-i-1},\end{aligned}$$

donde usamos la hipótesis inductiva, que V es supermartingala y que domina a Z.

(c) ν_0 es t.d.p. pues

$$\{\nu_0 = m\} = \{\underbrace{U_n - Z_n \neq 0}_{\in \mathcal{F}_m} \;\forall\, n < m, \underbrace{U_m - Z_m = 0}_{\in \mathcal{F}_m}\} \in \mathcal{F}_m,$$

con lo cual podemos concluir que el proceso detenido U^{ν_0} es supermartingala, pero además

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U^{\nu_0}_{n+1} - U^{\nu_0}_n|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((U^{\nu_0}_{n+1} - U^{\nu_0}_n)1_{\nu_0>n}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}((U^{\nu_0}_{n+1} - U^{\nu_0}_n)1_{\nu_0\leq n}|\mathcal{F}_n)\\ &= 1_{\nu_0>n}\mathbb{E}((U_{n+1} - U_n)|\mathcal{F}_n) + 1_{\nu_0\leq n}\mathbb{E}((U_{\nu_0} - U_{\nu_0})|\mathcal{F}_n)\\ &= 1_{\nu_0>n}\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) - U_n\\ &= 1_{\nu_0>n}(\mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = 0\end{aligned}$$

donde la última igualdad viene del hecho que como $n < \nu_0$, $U_n = \mathbb{E}(U_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.

(d) Notemos que como $Z \leq U$ y $\nu \leq N$, $\mathbb{E}(Z_\nu) = \mathbb{E}(Z^\nu_N) \leq \mathbb{E}(U^\nu_N) \leq \mathbb{E}(U^\nu_0) = \mathbb{E}(U_0)$, donde la última desigualdad es porque U^ν es supermartingala, para cualquier $\nu \in \mathcal{T}$. Ahora, como ν_0 es t.d.p. y U^{ν_0} es martingala,

$$\mathbb{E}(Z_\nu) \leq \mathbb{E}(U_0) = \mathbb{E}(U^{\nu_0}_N) = \mathbb{E}(U_{\nu_0}) = \mathbb{E}(Z_{\nu_0}),$$

donde lo último es por la definición de ν_0. Tomando supremo sobre los $\nu \in \mathcal{T}$ se concluye.

P2. Sea X martingala de cuadrado integrable, i.e. $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\langle X\rangle$ el compensador de la submartingala X^2.

(a) Pruebe que para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}((X_{n+m} - X_n)^2|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X^2_{n+m} - X^2_n|\mathcal{F}_n)$$

y concluya que $\mathbb{E}((X_{n+m} - X_n)^2) = \mathbb{E}(X^2_{n+m} - X^2_n)$.

(b) Suponga que X tiene incrementos independientes, es decir que $X_{n+1} - X_n$ es independiente de $\mathcal{F}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se definen para $n \in \mathbb{N}$ $\sigma^2_{n+1} = \mathrm{Var}(X_{n+1} - X_n)$, con $\sigma^2_0 = \mathrm{Var}(X_0)$. Demuestre que

$$\mathrm{Var}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \sigma^2_k$$

y deduzca que $\langle X\rangle_n = \mathrm{Var}(X_n) - \sigma^2_0$.

Demostración:

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X_{n+m} - X_n)^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X^2_{n+m} - 2X_{n+m}X_n + X^2_n|\mathcal{F}_n)\\ &= \mathbb{E}(X^2_{n+m}|\mathcal{F}_n) - 2X_n\underbrace{\mathbb{E}(X_{n+m}|\mathcal{F}_n)}_{X_n} + X^2_n\\ &= \mathbb{E}(X^2_{n+m}|\mathcal{F}_n) - X^2_n\end{aligned}$$

y tomando esperanza se concluye.

(b) Ocupamos que los incrementos independientes:

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n} X_k - X_{k-1} + X_0) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k - X_{k-1}) + \mathrm{Var}(X_0) = \sum_{k=0}^{n}\sigma^2_k.$$

Además, recordamos que el compensador de una submartingala M está definida por

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(M_k - M_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}),$$

por lo que usando la parte **(a)** y que los incrementos son independientes queda:

$$
\begin{aligned}
\langle X\rangle_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 - X_{k-1}^2|\mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k - X_{k-1}) + \underbrace{\mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2}_{=0} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = \mathrm{Var}(X_n) - \sigma_0
\end{aligned}
$$

P3. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un proceso a valores en $[0,1]$, tal que $X_0 = a$ y

$$
\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}|\mathcal{F}_n) = 1 - X_n, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}|\mathcal{F}_n) = X_n.
$$

(a) Muestre que X es una martingala convergente c.s. y en L^2 a una variable aleatoria Z.

(b) Pruebe que $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n(1 - X_n))$.

(c) Calcule $\mathbb{E}(Z(1 - Z))$. ¿Cómo distribuye Z?

Demostración:

(a) Claramente el proceso es adaptado e integrable al ser acotado por 1. Además:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(X_{n+1}1_{X_{n+1}=\frac{X_n}{2}} + X_{n+1}1_{X_{n+1}=\frac{X_n+1}{2}}|\mathcal{F}_n) \\
&= \frac{X_n}{2}\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}) + \frac{X_n+1}{2}\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n+1}{2}) \\
&= \frac{X_n}{2}(1 - X_n) + \frac{X_n+1}{2}X_n = X_n,
\end{aligned}
$$

por lo que X es martingala, y al estar acotada, converge c.s. (y en L^p por consecuencia del TCD y la desigualdad de Doob) a una variable que llamaremos Z.

(b) Ocupamos esperanzas anidadas y la **P2 (a)**:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n)) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}^2 - X_n^2|\mathcal{F}_n)) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\frac{X_n}{2}\right)^2(1 - X_n) + \left(\frac{X_n+1}{2}\right)^2 X_n\right) \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_n(1 - X_n)).
\end{aligned}
$$

(c) Notemos que

$$
\mathbb{E}(Z(1 - Z)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n(1 - X_n)) = 4 \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) = 0,
$$

por lo que Z toma valores en $\{0,1\}$, es decir, X distribuye bernoulli de parámetro

$$
p = \mathbb{E}(Z) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = a.
$$