Pauta C3 P2.

(a) (P_a) $\min f_a(x,y) = x^2 + a y^2 + xy + x$
s.a $x + y - 1 \leq 0$

i) 1.5 ptos Escribamos las ecuaciones de KKT de (P_a):

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 2x + y + 1 + \mu \\ 2ay + x + \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mu(x+y-1) = 0 \\ \mu \geq 0 \\ x + y - 1 \leq 0. \end{cases}$$

*obs: $\mathcal{L}(x,y,\mu) = x^2 + ay^2 + xy + x + \mu(x+y-1)$.

Si $\mu = 0$, entonces

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2ay + x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -4ay + y + 1 = 0$

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{4a-1}$ $\quad * \boxed{a \neq \frac{1}{4}}$

$\Rightarrow x = \dfrac{-2a}{4a-1}$.

Como queremos que sea pto KKT, Entonces faltaría:

$x + y - 1 \leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4a-1} - \dfrac{2a}{4a-1} - 1 \leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{1 - 2a + 1 - 4a}{4a-1} \leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{2(1-3a)}{4a-1} \leq 0$.

y con esto:

① $[1 - 3a \leq 0 \wedge 4a - 1 > 0]$ ó

② $[1 - 3a \geq 0 , 4a - 1 < 0]$.

Por ①, $\frac{1}{3} \leq a \wedge a > \frac{1}{4}$

Por ②, $\frac{1}{3} \geq a \wedge a < \frac{1}{4}$

Con esto, el conjunto que buscamos es:

$$(-\infty, \tfrac{1}{4}) \cup (\tfrac{1}{3}, +\infty).$$

ii) 1.5 ptos Si ahora buscamos que $\mu \neq 0$. Entonces:

$$\begin{cases} 2x + y + 1 + \mu = 0 \\ 2ay + x + \mu = 0 \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 1 - y$. Reemplazando

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - 2y + y + 1 + \mu = 0 \\ 2ay + 1 - y + \mu = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - y + 1 + \mu = 0 \\ 2ay - y + 1 + \mu = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2 - 2ay = 0$.

Con esto $a \neq 0 \wedge y = \frac{1}{a} \wedge x = 1 - \frac{1}{a}$

Calculando μ:

$\mu = -2ay - x = -2 - 1 + \frac{1}{a} = -3 + \frac{1}{a}$.

Como $\mu > 0$, entonces

$\frac{1}{a} > 3 \quad (\Rightarrow a > 0) \Rightarrow a < \frac{1}{3}$

Así, el conjunto buscado es:

$$\left(0, \frac{1}{3}\right).$$

iii] 1.5 ptos. Considerando el pto KKT:

$$\left(1-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right) \text{ con } \mu = \frac{1}{a} - 3 \overset{?}{>} 0.$$

tenemos que el cono crítico está dado por:

$$C = \left\{ (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla g\left(1-\tfrac{1}{a}, \tfrac{1}{a}\right)^t \omega = 0 \right\}$$

Con $g(x,y) = x + y - 1$.

Así: $C = \{ \omega \in \mathbb{R}^2 \mid \omega_1 + \omega_2 = 0 \}$.

$$\Updownarrow$$
$$\omega_1 = -\omega_2.$$

El Hessiano del Lagrangeano (en x, y) queda:

$$H_{\mathcal{L}_{x,y}}(x, y, \mu) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix}$$

y para $\omega \in C \setminus \{0\}$ buscamos que

$$\omega^t H_{\mathcal{L}}\left(1-\tfrac{1}{a}, \tfrac{1}{a}, \mu\right) \omega > 0.$$

$$(\omega_1 \ \ -\omega_1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ -\omega_1 \end{pmatrix}$$

$$= (\omega_1 \ \ -\omega_1) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_1(1-2a) \end{pmatrix}$$

$$= \omega_1^2 - \omega_1^2(1-2a)$$

$$= \omega_1^2 \, 2a.$$

Luego, es >0 si $a > 0$.

Con esto, los valores que puede tomar a son

$$a \in \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

y así $\left(1-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$ es mínimo local.

b] Sean $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y:

$$\min \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i)$$
$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$
$$x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, m.$$

0.5 ptos

i] Primero ~~escribimos~~ denotamos:

$$h(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i - 1 \quad \Big/ \quad h(x) = 0$$
$$g_i(x) = -x_i. \quad \Big/ \quad g_i(x) \leq 0.$$

y vemos que los gradientes son:

$$\{ \nabla h(x), \nabla g_1(x), \nabla g_2(x), \dots, \nabla g_m(x) \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donde es un conjunto de $m+1$ vectores. Es fácil ver que ~~para~~ ~~si falta~~ si sacamos al menos uno de ellos, entonces queda l.i. Pero si todas las restricciones están activas, entonces $x_i = 0 \ \forall i$

$$\text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

lo que es una contradicción.

Así, siempre hay al menos una ~~cota~~ ~~que~~ restricción no activa.

b ii) 1.0 pto

Si $\bar{x}$ es un mínimo local de (P), como se satisface la calificación de restricción de lineal independencia, Existen $\mu \in \mathbb{R}^m_+$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\nabla\left(\sum f_i\right)(\bar{x}) + \sum \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) + \lambda \nabla h(\bar{x}) = 0.$$

$$\text{con} \quad \mu_i g_i(\bar{x}) = 0$$
$$\mu_i \geq 0.$$

Por como está definida la función objetivo:

$$\begin{pmatrix} f_1'(\bar{x}_1) \\ f_2'(\bar{x}_2) \\ \vdots \\ f_m'(\bar{x}_m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ -\mu_2 \\ \vdots \\ -\mu_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_1'(\bar{x}_1) + \lambda \\ f_2'(\bar{x}_2) + \lambda \\ \vdots \\ f_m'(\bar{x}_m) + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}.$$

Si $\bar{x}_i > 0 \Rightarrow g_i(\bar{x}) < 0 \Rightarrow \mu_i = 0$
$\Rightarrow f_i'(\bar{x}_i) + \lambda = 0.$

Si $\bar{x}_i = 0 \Rightarrow g_i(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \mu_i \geq 0$
$\Rightarrow f_i'(\bar{x}_i) + \lambda = \mu_i \geq 0.$

Por lo que λ es el buscado.