Auxiliar 2: Teorema de Karush-Kuhn-Tucker

Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: Cristian Correa
Ayudantes: Carlos Poblete, Vicente Rojas

7 de abril de 2019

Resumen

Para los siguientes puntos, considere el siguiente problema general de optimización:

$$\begin{array}{ll} \min & \text{f}(x) \\ \text{s.a} & g_i(x) \leq 0,\ i = 1, ..., m_1 \\ & h_j(x) = 0,\ i = 1, ..., m_2. \end{array}$$

1. Propiedad: Si f es una función dos veces diferenciable tal que el Hessiano de f es una matriz semi-definida positiva, entonces f es una función convexa.

2. Teoremas de Existencia: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(i) Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\{x \in S : f(x) \leq \lambda\}$ es no vacío y acotado
(ii) f es continua y S es cerrado y acotado

entonces $\exists \bar{x} \in S$ tal que $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in S$, es decir, el problema de minimizar f sobre el conjunto S tiene solución.

3. Teorema de Unicidad: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f es estrictamente convexa y S es un conjunto convexo, entonces existe a lo más un único ótimo.

4. Condiciones de KKT: Diremos que cumple con las condiciones de KKT en un problema de optimización si existen escalares $\{\mu_i\}_{i=1}^{m_1}$,$\{\lambda_i\}_{i=1}^{m_2}$ tales que:

$$g_i(\bar{x}) \leq 0, h_j(\bar{x}) = 0\ i = 1, ..., m_1,\ j = 1, ..., m_2 \tag{1}$$

$$\mu_i \geq 0, \lambda_j \in \mathbb{R}\ \ i = 1, ..., m_1,\ j = 1, ..., m_2 \tag{2}$$

$$\mu_i g_i(\bar{x}) = 0,\ i = 1, ..., m_1 \tag{3}$$

$$\bigtriangledown f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m_1} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m_2} \lambda_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \tag{4}$$

5. Calificación de Restricciones: Diremos que un problema de optimización cumple con calificación de restricciones si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

(i) Existe un punto interior, es decir, $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $g_i(x) < 0$ para algún $i \in \{1, ..., m_1\}$. Esto se conoce como la condición de Slater.
(ii) $\nabla \mathrm{g}_i$ y $\nabla \mathrm{h}_j$ son linealmente independientes para todas las restricciones activas. Esto se conoce como LICQ o independencia lineal

6. Teoremas de KKT:

(i) S $\bar{x}$ es mínimo local con $f, \{g_i\}_{i=1}^{m_1}$ funciones convexas y $\{h_j\}_{j=1}^{m_2}$ funciones afines (cóncavas y convexas), y el problema cumple con calificación de restricciones, entonces $\bar{x}$ satisface las condiciones de KKT. Esto también se cumple directamente si $\{g_i\}_{i=1}^{m_1}$ y $\{h_j\}_{j=1}^{m_2}$ son funciones afines.
(ii) Si $\bar{x}$ satisface las condiciones de KKT con f, $\{g_i\}_{i=1}^{m_1}$ funciones convexas, $\{h_j : j \in \{1, ..., m_2\}, \lambda_j \geq 0\}$ funciones convexas y $\{h_j : j \in \{1, ..., m_2\}, \lambda_j \leq 0\}$ funciones cóncavas, entonces $\bar{x}$ es mínimo global.

1. Pregunta 1

Una empresa manufacturera necesita determinar su plan de producción. Según los estudios realizados, el beneficio unitario por producto está dado por:
Producto 1: $(800 - a - x_1 - x_2)$ por unidad.
Producto 2: $(2000 - a - x_1 - x_2)$ por unidad.
Donde x_1 y x_2 son el número de unidades de producto 1 y 2 respectivamente.
Además, para elaborar estos productos se requiere mano de obra que denominaremos recurso 1, y Horas de máquina que será recurso 2. Los factores productivos y disponibilidad se muestran en la siguiente tabla:

Producto	Recurso 1	Recurso 2
1	8	7
2	3	6
Disponibilidad (horas/mes)	1200	2100

Cuadro 1: Factores productivos y disponibilidad

Encuentre la formulación del problema de determinar un plan de producción óptimo y resuélvalo usando KKT.

2. Pregunta 2

Lema de Farkas: Sea $\{a_i : i \in I \cup J\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ y b $\in \mathrm{R}^n$. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Para todo d $\in \mathrm{R}^n$ se tiene que

$$(\forall i \in I, \langle a_i, d \rangle \geq 0) \wedge (\forall j \in J, \langle a_j, d \rangle = 0) \Longrightarrow \langle b, d \rangle \geq 0. \tag{5}$$

ii) Existen $\lambda \in \mathbb{R}_+^{|I|}$ y $\mu \in \mathbb{R}^{|J|}$ tales que

$$b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i + \sum_{j \in J} \mu_j a_j. \tag{6}$$

3. Pregunta 3

Una empresa fabrica un producto x que vende en el mercado a precio 1 por unidad. Para generar este producto y poder venderlo, la empresa necesita un insumo y. La cantidad de insumo y que se necesita para producir x viene dado por la regla de producción

$$y = x^2 \tag{7}$$

Por otro lado, por problemas de almacenamiento, la empresa debe respetar la restricción

$$y^2 + x^2 \leq 4 \tag{8}$$

La ganancia G viene dada por la cantidad de x que se vende (Asuma que la demanda es tan grande que todo lo que se produce se vende), mientras que el costo de producción C viene dado por la cantidad de insumo y que se requiere para producir x. Las utilidades de la empresa se pueden expresar como $u = G - C$.

a) Plantee el problema de optimización que debe resolver la empresa para maximizar sus utilidades (incluyendo las desigualdades implícitas del problema).

b) Encuentre, aplicando el teorema de KKT, los candidatos a solución del problema. Estudie los valores posibles de los multiplicadores obtenidos.

c) Dentro de los candidatos justifique cuáles son soluciones locales o globales y resuelva el problema.