MA3403. Probabilidades y Estadística
Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Pablo Araya, Nicolas Valenzuela y Javier Santibáñez.
Fecha: Jueves 9 de Mayo, 2019.

Auxiliar Extra C2

Problemas

P1. **[C2-2016]** Se lanza un dado equilibrado sucesivamente n veces de manera independiente. Se define una *ascensión* como una corrida maximal estrictamente creciente (por ejemplo, la secuencia 156233466 tiene cuatro ascensiones: 156, 23,346 y 6). Calcule la cantidad esperada de ascensiones.

P2. *a)* El tiempo de funcionamiento de un satélite se modela como una variable aleatoria distribuida exponencialmente con un tiempo esperado de 1.5 años. Si se lanzan simultáneamente 3 satélites, ¿Cuál es la probabilidad de que después de 2 años sigan funcionando exactamente 2?

b) Sean X, Y v.a. con varianza finita, pruebe que si $\mathrm{Var}(X) \neq \mathrm{Var}(Y) \Rightarrow X + Y,\ X - Y$ no son independientes.

P3. **[C2-2012]** Usted trabaja atendiendo un almacén. Los clientes llegan siguiendo un proceso de Poisson con tasa λ de 0,5 clientes por minuto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 4 minutos lleguen a lo más 2 clientes?

b) Sea T el instante en que llega el primer cliente, y S el tiempo que transcurre desde T hasta que llega el siguiente cliente. Para $0 \leq t \leq s$, muestre que

$$\mathbb{P}(T \leq t,\ s \leq T + S) = \lambda t e^{-\lambda s}$$

Indicación: usando una propiedad conocida, condicione en los posibles resultados de T; argumente por qué T y S son independientes y utilice este hecho.

Suponga que en el instante 0 usted se ausenta del almacén y vuelve después de 5 minutos. Al volver observa que ha llegado exactamente 1 cliente. Queremos probar que, dado que llegó un solo cliente en $[0, s]$, la variable T se distribuye uniformemente en dicho intervalo.

c) **[Propuesto]** Argumente que el evento en que llega un solo cliente en $[0, s]$ corresponde al evento $\{T \leq s < T + S\}$. Para $0 \leq t \leq s$, calcule $\mathbb{P}(T \leq t \mid \text{llega un solo cliente en } [0, s])$ y concluya.
Indicación: utilice la parte anterior.

P4. **[C2-2014]** Decimos que una v.a. tiene distribución de *Rayleigh* con parámetros $\sigma > 0$, si su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{x e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sigma^2} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

a) Dado $\lambda > 0$, obtenga la densidad de la variable $Y = X^2/(2\sigma^2\lambda)$.

b) Muestre que la f.g.m. de X es $M_X(t) = 1 + \sqrt{2\pi}\sigma t e^{\sigma^2 t^2/2}\Phi(\sigma t)$, donde Φ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar, es decir,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) Calcule la esperanza y varianza de X.

d) Sean U y V variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Muestre que $R = \sqrt{U^2 + V^2}$ posee distribución de *Rayleigh* con parámetro σ.
Indicación: Muestre que $M_R(t) = M_X(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$ y argumente por qué esto prueba lo buscado. Además, puede utilizar que para $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(g(U, V)) = \int\int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) f_{U,V}(u, v) du dv.$$

P5. Sean X, Y v.a. independientes exponenciales de parámetro λ. Calcule la distribución de:

$$Z = \frac{X}{X + Y}.$$

Indicación: Considere $W = X + Y$ y calcule la densidad conjunta de Z, W.