MA3403-6. Probabilidades y Estadística
Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Pablo Araya y Javier Santibáñez.
Fecha: Miércoles 8 de Mayo, 2019.

Auxiliar 7

Resumen

Def 1 (Tipos de $\vec{v.e}$)**.** Sea $\vec{Z} = (X, Y)$ un vector aleatorio. Diremos que es:

- **Discreto:** Si X, Y son v.a's discretas. Además se define la **función de distribución conjunta** como sigue:
$$p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$
- **Continuo:** Si $\exists f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ tal que $\forall A \subseteq \mathbb{R}^2$:
$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \int\int_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x, y)dxdy$$

Def 2. (Distribuciones marginales) Se definen las **distribuciones marginales** de un vector aleatorio $Z = (X, Y)$ como sigue:

- Si Z es discreto, entonces
$$p_X(x) = \sum_{j\in R_Y} \mathbb{P}(X = x, Y = j)$$
- Si Z es continuo, entonces
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dy$$

para ambos casos se define análogamente la distribución marginal de Y.

Prop 1. *Sea $Z = (X, Y)$ entonces X e Y son independientes si y solo si:*

- ***Discreto:*** $p_{X,Y}(h, l) = p_X(h) \cdot p_Y(l)$
- ***Continuo:*** $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Prop 2 (Convolución)**.** *Sean X, Y variables aleatorias continuas independientes, entonces:*

$$f_{X+Y}(z) = f_X * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx$$

Teo 1 (Teorema del Cambio de Variable)**.** *Sean X, Y v.a. con densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ conocida. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con g suave, invertible y g^{-1} suave, entonces $\forall(u, v) \in \mathbb{R}^2$:*

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{|det(J_g(x, y))|} = f_{X,Y}(g^{-1}(u, v))|det(J_{g^{-1}})(u, v)|$$

Problemas

P1. Dadas A, B, C variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[0, 1]$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$ tenga soluciones reales?

P2. La fuerza magnética H en un punto P ubicado a X unidades de un cable con corriente I, queda dada por:

$$H = \frac{2I}{X}$$

Si P es un punto variable con X e I, suponiendo que X se distribuye uniforme en el intervalo $(2, 4)$ e I uniforme en el intervalo $(10, 20)$ (ambas variables independientes), calcule la función de densidad de H.

P3. Sean X, Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim exp(\lambda)$ e $Y \sim unif(-\pi, \pi)$. Sean $U = \sqrt{X}cos(Y)$ y $V = \sqrt{X}sin(Y)$.

a) Encuentre la densidad conjunta de U y V . ¿Son independientes?

b) Determine la densidad de $U + V$.

P4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ como la figura, y sea (X, Y) un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre A, es decir:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\mathbb{1}_A(x, y)}{area(A)}$$

a) Muestre que $f_X(x) = \frac{2-|x|}{3}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Calcule también la densidad marginal de Y.

b) Deduzca que $\mathbb{E}(X) = 0$. y muestre que $cov(X, Y) = 0$.

c) ¿Son independientes X e Y? Justifique