MA3403-6. Probabilidades y Estadística
Profesor: Roberto Cortez M.
Auxiliares: Pablo Araya y Javier Santibáñez.
Fecha: Jueves 4 de Abril, 2019.

Auxiliar 3

Resumen

Teorema 1 (Probabilidades Totales)**.** *Sea* $\{B_i\}_{i=1}^n$ *una partición de* Ω *y* A *un evento. Entonces se cumple lo siguiente:*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Definición 1. Diremos que dos eventos A, B son **independientes** si y solo si:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Definición 2. Una **Variable Aleatoria** es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Denotamos R_X como el rango de X. Definimos su **ley** como la función: $\mu_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $\mu_X(A) := \mathbb{P}(X \in A)$

Definición 3. Diremos que X es una variable aleatoria **Discreta** si R_X cumple lo siguiente:

1. $|R_X| \leq |\mathbb{N}|$
2. $\mathbb{P}(X \in R_X) = 1$
3. $(\forall k \in R_X)\mathbb{P}(X = k) > 0$

También definimos su **función de distribución discreta** asociada a la variable X como

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) \ (\forall k \in R_X)$$

X	Parámetros	Rango	p_X
$Bernoulli(p)$	$p \in [0,1]$	$\{0,1\}$	$p_X(0) = 1-p, p_X(1) = p$
$Binom(n,p)$	$n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$	$\{0,1,...,n\}$	$p_X(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
$Geom(p)$	$p \in [0,1]$	$\{1,2,..\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$
$BN(r,p)$	$r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p \in [0,1]$	$\{r+1, r+2, ..\}$	$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$
$Poisson(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Problemas

P1. [**Monty-Hall**] En un concurso en el cual usted está participando le permiten abrir una de 3 puertas, en la cual sólo detrás de una hay un premio. Al momento de elegir, el presentador abre una puerta y se da cuenta que está vacía. A raíz de eso el presentador le ofrece cambiar su puerta. ¿Es conveniente aceptar la oferta?

P2. Se lanza un dado perfecto; sea J el resultado obtenido. Luego se tiran dos monedas tal que $\mathbb{P}(\text{Cara}) = \frac{J}{6}$. Calcule la probabilidad de que J sea par si se obtuvieron dos sellos.

P3. Un evento E se dice *trivial* si $\mathbb{P}(E) = 1$ o bien $\mathbb{P}(E) = 0$. Muestre que E es trivial si y solo si es independiente de si mismo.

P4. [**Variables Aleatorias**]

a) Se dispone de una moneda con probabilidad de cara p, la cual se lanza sucesivamente hasta que se acumulen m caras o m sellos, lo que ocurra primero. Sea X la cantidad de lanzamientos realizados. Calcule $\mathbb{P}(X = k), \forall k \in R_X$.

b) Supongamos que la probabilidad de que una vacuna en una cierta clínica no funcione es de 0.05. Si el testeo de estas vacunas se hace de manera independiente ¿cual es la probabilidad de que entre 10 vacunas haya **al menos** una que no funcione?

P5. [**El problema de los sombreros, versión mochila**] A Beauchef 850 llegan n personas a tomar cierto bebestible (Pato Loco), dejando sus mochilas en los pastos. Al acabarse el carrete, todos deben irse, pero dado su estado, cada uno elige una de las mochilas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda persona saque su mochila? ¿Cuál es la probabilidad de que el k-ésimo saque su mochila?