

Auxiliar 10

Queda poquitoo!

Profesor: Vicente Acuña

Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

- P1.** Una compra-venta de autos paga una cantidad X por un vehículo y lo vende a una cantidad Y . las variables X e Y tienen densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{36} & 0 < x < y < 6 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

- a) Encuentre las densidades marginales de X e Y .
 - b) Calcule $\mathbb{E}(X|Y)$ y $\mathbb{E}(Y|X)$.
 - c) Si quisiera invertir en el negocio de compra y venta de autos. ¿Cuál es el valor esperado de la compra y el valor esperado de la venta?
- P2.** La cantidad de llamadas telefónicas recibidas en una empresa durante t horas es una variable $Poisson(\mu t)$. Se produce una falla en el sistema telefónico, durante este periodo las llamadas recibidas no pudieron ser atendidas. La duración de esta falla es una variable *Exponencial* de parámetro λ . Sea X la cantidad de llamadas no atendidas durante la falla.

Calcule, utilizando esperanzas condicionales, el valor esperado de X .

- P3.** Una gallina pone X huevos, donde X es una variable aleatoria *Poisson* de parámetro λ . Cada uno de esos huevos es fecundado con probabilidad p , es decir; cada huevo tiene probabilidad p de nacer, obteniendo así una cantidad de pollos que definiremos con la variable Y (Y = Cantidad de pollos salidos de X). Muestre que la correlación entre X e Y es $\rho(X, Y) = \sqrt{p}$.

- Sean Y_1, Y_2 v.a. conjuntamente continuas, con densidad conjunta $f(y_1, y_2)$. Se definen las **funciones de densidad marginal** de Y_1 e Y_2 como:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1$$

- Sean Y_1, Y_2 v.a. con densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y densidades marginales $f_{Y_1}(y_1)$, $f_{Y_2}(y_2)$. Se define la **densidad condicionada** de Y_1 dado $Y_2 = y_2$ como:

$$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_{Y_2}(y_2)}$$

siempre que $f_{Y_2}(y_2) > 0$. De manera análoga se determina $f(y_2|y_1)$.

- **Teorema:** si Y_1, Y_2 son v.a. continuas con densidad $f(y_1, y_2)$ y funciones marginales $f_{Y_1}(y_1)$ y $f_{Y_2}(y_2)$. Entonces se dice que Y_1 e Y_2 son **independientes** si, y sólo si;

$$f(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$$

Para todo par de números reales (y_1, y_2) .

- Sean X, Y dos variables aleatorias, se define la **covarianza** de X e Y como:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

- Sean X, Y dos variables, aleatorias. Se tiene:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

- Sean X, Y dos variables aleatorias, entonces:

$$X, Y \text{ independientes} \Rightarrow Cov(X, Y) = 0$$

- Sean X, Y variables aleatorias. Se define la **correlación** de X e Y como:

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

- Si X e Y son dos variables aleatorias cualesquiera, se define la esperanza condicional de X para un valor $Y = y_o$ dado como: Si $f(x|y_o)$ es la densidad condicional,

$$\mathbb{E}(X|Y = y_o) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y_o) dx$$

para el caso continuo, y:

$$\mathbb{E}(X|Y = y_o) = \sum_{\text{todo } Y} x \mathbb{P}(x|Y = y_o)$$

para el caso continuo.

- Se cumple que:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$$

para X e Y dos variables aleatorias cualesquiera.

Soluciones:

P1. a) Calculemos la densidad marginal de X :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^6 \frac{x}{36}dy = \frac{x(6-x)}{36}$$

Recordemos que para calcular la densidad marginal, la componente x de la densidad conjunta queda fija al momento de integrar en y , por eso es que el intervalo de integración es $(x, 6)$.

Para la densidad marginal de Y tenemos:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y \frac{x}{36}dx = \frac{1}{36} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{y^2}{72}$$

b) Para calcular las esperanzas condicionales necesitamos conocer las densidades condicionales. Sea $Y = \bar{y}$ un valor fijo para la variable aleatoria Y , entonces:

$$f(x|\bar{y}) = \frac{f_{X,Y}(x, \bar{y})}{f_Y(\bar{y})} = \frac{2x}{\bar{y}^2}$$

es la densidad condicional de X . De la misma forma, calculamos la densidad condicional de Y para algún valor $X = \bar{x}$:

$$f(y|\bar{x}) = \frac{f_{X,Y}(\bar{x}, y)}{f_X(\bar{x})} = \frac{1}{6 - \bar{x}}$$

Ahora podemos calcular las esperanzas condicionales. Para X dado $Y = \bar{y}$:

$$\mathbb{E}(X|Y = \bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} x \cdot f(x|\bar{y})dx = \int_0^{\bar{y}} \frac{2x^2}{\bar{y}^2}dx = \frac{2}{\bar{y}^2} \left(\frac{\bar{y}^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{2\bar{y}}{3}$$

De la misma forma, calculamos la esperanza condicional de Y dado un valor $X = \bar{x}$:

$$\mathbb{E}(Y|X = \bar{x}) = \int_{\bar{x}}^6 y \cdot f(y|\bar{x})dy = \int_{\bar{x}}^6 \frac{y}{6 - \bar{x}}dy = \frac{1}{6 - \bar{x}} \left(\frac{6^2}{2} - \frac{\bar{x}^2}{2} \right) = \frac{6 + \bar{x}}{2}$$

c) Calcularemos la esperanzas mediante las espranzas condicionales. Consideremos $g(\bar{y}) = \mathbb{E}(X|Y = \bar{y})$ y calculemos la esperanza de la función g , puesto que:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(g(Y))$$

Para calcular la esperanza de $g(Y)$ debemos ocupar la densidad marginal de Y , $f_Y(y) = y^2/72$. Entonces:

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_0^6 g(y) \cdot f_Y(y)dy = \int_0^6 \frac{2y}{3} \cdot \frac{y^2}{72}dy = \frac{1}{108} \left(\frac{6^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = 3$$

$$\implies \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = 3$$

Para la esperranza de Y ocuparemos el mismo proceso. Tomemos la función $h(\bar{x}) =$

$\mathbb{E}(Y|X = \bar{x})$ y calculemos la esperanza de esta función con la densidad marginal para X .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(X)) &= \int_0^6 h(x) \cdot f_X(x) dx = \int_0^6 \frac{6+x}{2} \cdot \frac{x(6-x)}{36} dx = \frac{1}{72} \int_0^6 x(6^2 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{72} \left(6^2 \int_0^6 x dx - \int_0^6 x^3 dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{6^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) - \frac{1}{72} \left(\frac{6^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = 4,5\end{aligned}$$

Entonces concluimos que:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(h(X)) = 4,5$$

P2. Denotemos por T a la duración del tiempo en que falló el sistema en horas, sabemos de antemano que T distribuye exponencial de parámetro λ .

Notemos que X depende directamente de el valor que tome la variable T , si la duración de la falla es mayor, la probabilidad de que lleguen más llamadas que no serán atendidas es más alta. Por lo tanto, calcularemos la esperanza condicionando a algún valor de T .

Supongamos que conocemos la duración de la falla, digamos $T = t_o$, entonces la cantidad de llamadas recibidas en las t_o horas es una variable *Poisson* de parámetro μt_o . Entonces la esperanza condicional es la esperanza de la variable Poisson de ese parámetro:

$$\mathbb{E}(X|T = t_o) = \mathbb{E}(\text{Poisson}(\mu t_o)) = \mu t_o$$

Entonces definimos la función $h(T) = \mu T$ el valor esperado de las llamadas no atendidas en un periodo de tiempo de duración T , además sabemos que T tiene densidad $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ para $t \geq 0$. Entonces calculemos la esperanza de $h(T)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(T)) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f_T(t) dt = \int_0^{\infty} \mu \lambda t e^{-\lambda t} dt = \mu \lambda \left(\left. \frac{t e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \right) \\ &= \mu \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{\mu}{\lambda}\end{aligned}$$

Por las propiedades de las esperanzas condicionales obtenemos la esperanza de X :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|T)) = \mathbb{E}(h(T)) = \frac{\mu}{\lambda}$$

P3. Podemos observar que; si fijamos un valor para X , entonces la variable Y corresponde a una *Binomial*.

Por ejemplo, si decimos que $X = k$, es decir, sabemos que la gallina puso k huevos, entonces cada huevo tiene probabilidad p de ser fecundado. Al unir el caso de cada huevo, nos queda una variable *Binomial* de parámetros k (cantidad de intentos = huevos) y p (probabilidad de éxito).

Conociendo esto, podemos decir que, calcular la esperanza condicional de Y dado un valor $X = k$, en realidad es calcular la esperanza de una variable *Binomial*(k, p), cuyo valor

conocemos: $\mathbb{E}(Y|X = k) = kp$. De forma más general, tenemos:

$$\mathbb{E}(Y|X) = Xp$$

Ahora definamos la variable aleatoria XY , la multiplicación de X con Y . Por teorema tenemos que:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X))$$

Pero al condicionar sobre X , es decir, al fijar valores para X , el valor XY sólo posee aleatoriedad gracias a la variable Y . O sea que X es constante para la esperanza condicional, por lo tanto puede salir:

$$\mathbb{E}(XY|X) = X\mathbb{E}(Y|X)$$

Luego, como $\mathbb{E}(Y|X)$ es un término conocido, reemplazamos todo en la ecuación inicial:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X)) \\ &= \mathbb{E}(X \cdot Xp) = p\mathbb{E}(X^2)\end{aligned}$$

Finalmente, recordando la esperanza y la varianza de una $Poisson(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \lambda \\ Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda \\ \implies \mathbb{E}(X^2) &= Var(X) + \mathbb{E}(X)^2 = (\lambda^2 + \lambda)\end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$\mathbb{E}(XY) = p\mathbb{E}(X^2) = (\lambda^2 + \lambda)p$$

Lo último dato faltante para el coeficiente de correlación es la esperanza y varianza de Y . Volvemos a ocupar nuestra relación entre la esperanza condicional y la esperanza de la variable:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Xp) = p\mathbb{E}(X) = p\lambda$$

Del mismo modo, podemos conocer la esperanza de Y^2 sabiendo la esperanza y varianza de una binomial.

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y^2|X))$$

La esperanza condicional de Y^2 entonces será la misma que el momento de segundo orden de una variable *Binomial* pero dependiendo de X como la cantidad de realizaciones, es decir $\mathbb{E}(Y^2|X) = Var(Binomial(X, p)) + \mathbb{E}(Binomial(X, p))^2 = Xp(1 - p) + X^2p^2$.

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y^2|X)) = \mathbb{E}(Xp(1 - p) + X^2p^2) \\ &= p(1 - p)\mathbb{E}(X) + p^2\mathbb{E}(X^2) \\ &= p(1 - p)\lambda + (\lambda^2 + \lambda)p^2 \\ &= p\lambda + p^2\lambda^2 \\ \implies Var(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 \\ &= p\lambda + p^2\lambda^2 - p^2\lambda^2 = p\lambda\end{aligned}$$

Entonces, recapitulemos los datos que hemos encontrado:

- $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- $\mathbb{E}(Y) = p\lambda$
- $Var(Y) = p\lambda$
- $\mathbb{E}(XY) = (\lambda^2 + \lambda)p$

Entonces el coeficiente de correlación es:

$$\begin{aligned}\rho(X, Y) &= \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{(\lambda^2 + \lambda)p - \lambda(p\lambda)}{\sqrt{\lambda(p\lambda)}} \\ &= \frac{\lambda p}{\lambda\sqrt{p}} = \sqrt{p}\end{aligned}$$

Por lo tanto el coeficiente de correlación entre X e Y es $\sqrt{p}$.