Auxiliar 8

Parito & C2

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

- Si $F(y)$ es una función de **distribución** de la variable aleatoria Y entonces:
  - $\lim_{y\to-\infty} F(y) = 0$
  - $\lim_{y\to\infty} F(y) = 1$
  - $F(y)$ no es decreciente en la variable y.
  - $F(y)$ es contínua por la derecha.
- Si $F(y)$ es función de **distribución** para una v.a. contínua Y. Entonces:

$$f(y) = \frac{d}{dy}F(y) = F'(y)$$

Se denomina función de **densidad** para la variable aleatoria Y, se tiene que:

$$\mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \int_a^b f(y)dy$$

- Sean Y_1, Y_2 variablesa aleatorias con distribución conjunta $F(y_1, y_2)$. Si existe una función no negativa $f(y_1, y_2)$ tal que:

$$F(y_1, y_2) = \mathbb{P}(Y_1 < y_1, Y_2 < y_2)$$
$$= \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} f(t_1, t_2)dt_1dt_2$$

Entonces se dice que Y_1, Y_2 son v.a. conjuntamente contínuas. La función $f(y_1, y_2)$ recibe el nom bre de **densidad conjunta**.

- Sean Y_1, Y_2 v.a. conjuntamente contínuas, con densidad conjunta $f(y_1, y_2)$. Se definen las **funciones de densidad marginal** de Y_1 e Y_2 como:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)dy_2$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)dy_1$$

- Sean Y_1, Y_2 v.a. con densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y densidades marginales $f_{Y_1}(y_1)$, $f_{Y_2}(y_2)$. Se ddefine la **densidad condicionada** de Y_1 dado $Y_2 = y_2$ como:

$$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_{Y_2}(y_2)}$$

siempre que $f_{Y_2}(y_2) > 0$. DDe manera análoga se determina $f(y_2|y_1)$.

- **Teorema:** si Y_1, Y_2 son v.a. contínuas con densidad $f(y_1, y_2)$ y funciones marginales $f_{Y_1}(y_1)$ y $f_{Y_2}(y_2)$. Entonces se dice que Y_1 e Y_2 son **independientes** si, y sólo si;

$$f(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$$

Para todo par de números reales (y_1, y_2).

P1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- ¿Son X e Y independientes?
- Calcule $\mathbb{P}(Y < kX)$, $\forall\ k$.

P2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y} & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcule las densidades marginales $f_Y(y)$.

P3. sea $f(x,y) = cye^x$ para $x \le y \le 0$; $f(x,y) = 0$ para el resto.

a) Calcule c para que la función anterior sea una densidad conjunta para los vectores (x, y). Conociendo c, obtenga las funciones de distribución conjunta, marginales y condicionadas.

b) Dado $x = x_o$ fijo, determine la esperanza de Y como variable aleatoria.

c) Dado $y = y_o$ fijo determine la esperanza de X como variable aleatoria.

Soluciones:

P1.

- Para ver si X e Y son independientes, notemos que la función de densidad conjunta puede reescribirse como: para $x, y \geq 0$

$$f_{X,Y}(x,y) = \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} = (\lambda e^{-\lambda x})(\mu e^{-\mu y}) = g(x) \cdot h(y)$$

  Donde g y h son dos funciones que sólo dependen de una sola variable, más aún, ambas corresponden a la densidad de una exponencial de parámetros y μ, respectivamente. Por lo tanto, como pude separar la densidad conjunta en la multiplicación de dos densidades, una para X y una para Y, entonces podemos concluir que X e Y son variables exponenciales independientes.

- Para un k dado, el evento $\{Y < kX\}$ determina una cota para la variable Y en función de la variable X, sin embargo, bajo esta interpretación del conjunto, no hay cota para la variable X, por lo tanto eventualmente, la variable Y podría tomar cualquier valor, siempre y cuando kX sea mayor que esto. Entonces los intervalos de integración serán las cotas para Y, es decir $(0, kX)$, junto a toda la semi recta real positiva para la variable X:

$$\mathbb{P}(Y < kX) = \int_0^\infty \left(\int_0^{kx} f_{X,Y}(x,y)dy \right) dx$$

$$= \lambda\mu \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left(\int_0^{kx} e^{-\mu y} dy \right) dx = \lambda\mu \int_0^\infty e^{-\lambda x} \left(-\frac{e^{-\mu k x}}{\mu} + \frac{1}{\mu} \right) dx$$

$$= \lambda \left(\int_0^\infty e^{-\lambda x} - e^{-(\lambda + k\mu)x} dx \right) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + k\mu} \right) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + k\mu} = \frac{k\mu}{\lambda + k\mu}$$

P2. Para calcular la densidad marginal de la variable Y, integramos sobre todo el cunjunto en que X está definido, es decir:

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} e^{-y} dx = e^{-y} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{y}} dx = e^{-y}(ye^0) = ye^{-y}$$

(La densidad de X es mucho más compleja de calcular y se escapa de los contenidos necesarios para el curso) **Propuesto:** Demuestre que la función $f_{X,Y}$ es efectivamente una densidad.

P3. *a*) Recordemos que una función de densidad debe ser no negativa para todo valor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, además la integral esta función en todo el plano real debe ser una constante igual a 1. Considerando esto, imponemos la condición de que la integral sea igual a 1:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^y cye^x dxdy$$

$$= c \int_{-\infty}^0 y \left(\int_{-\infty}^y e^x dx \right) dy = c \int_{-\infty}^0 ye^y dy = -c$$

$$\therefore \; 1 = -c \Longrightarrow c = -1$$

Luego la función $f_{X,Y}$ integra 1 en todo el espacio, y es facil mostrar que toma valores positivos o nulos para cualquier punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- **Densidades marginales:** Para calcular las densidades marginales, fijamos un punto en una sola coordenada, luego integramos sobre todo el dominio de la segunda variable generado por el punto tomado. Por ejemplo, tomemos un valor $x_o \in \mathbb{R}_-$, este valor dado obliga a la variable y a permanecer en el conjunto $[x_o, 0]$ por lo tanto, la densidad marginal para X es:

$$f_X(x_o) = \int_{x_o}^{0} f(x_o, y)dy = \int_{x_o}^{0} -ye^{x_o}dy = \frac{x_o^2}{2}e^{x_o}$$

  Notamos que esta función es siempre positiva o cero, además integra 1 en el intervalo $(-\infty, 0)$ por lo calculado al principio.
  Del mismo modo, eligiendo ahora un valor y_o, sabemos que la variable x sólo puede tomar valores dentro del intervalo $(-\infty, y_o]$, por lo tanto la densidad marginal para Y es:

$$f_Y(y_o) = \int_{-\infty}^{y_o} f(x, y_o)dx = \int_{-\infty}^{y_o} -y_oe^{x}dx = -y_o\int_{-\infty}^{y_o} e^{x}dx = -y_oe^{y_o}$$

- **Densidades condicionales:** Cuando quiero calcular una probabilidad condicional, divido el espacio y reparto todas las probabilidades en conjuntos que cumplan la condición que me dan. En este caso será el valor de una de las variables. Por ejemplo; si afirmamos que la variable X toma un valor x_o fijo, la probabilidad de Y dado que $X = x_o$ estará dada por la densidad condicional, calculada de la siguiente forma:

$$f(y|X = x_o) = \frac{f(x_o, y)}{f_X(x_o)} = \frac{-ye^{x_o}}{\frac{x_o^2}{2}e^{x_o}} = \frac{-2y}{x_o^2}$$

  Acá, $f(x, y)$ es la densidad conjunta y $f_X(x)$ es la densidad marginal de X. Caso análogo pasa para la probabilidad de X condicionada a valores de Y.
  La probabilidad de X dado $Y = y_o$, donde y_o es un valor fijo para Y, está dada por la siguiente densidad:

$$f(x|Y = y_o) = \frac{f(x, y_o)}{f_Y(y_o)} = \frac{-y_oe^{x}}{-y_oe^{y_o}} = e^{x-y_o}$$

b) ¿Cuál es el valor esperado que tomará Y para un valor $X = x_o$ fijo? A este dato se le llama *Esperanza condicional* y se denota como $\mathbb{E}(Y|X = x_o)$, es bastante intuitivo pensar que; si Y es dependiente de X, entonces este valor esperado será dependiente del x_o fijado inicialmente, por lo tanto tenemos que $\mathbb{E}(Y|X = x_o)$ tiene que ser una variable de x_o. La forma de calcularla es exáctamente la misma que las esperanza pero usando las densidades condicionales, para esto es necesario considerar el intervalo de integración según el caso dado x_o.
Para este caso particular, si $X = x_o$, entonces $y \in [x_o, 0]$:

$$\mathbb{E}(Y|X = x_o) = \int_{xo}^{0} y \cdot f(y|X = x_o)dy = \int_{x_o}^{0} \frac{-2y^2}{x_o^2}dy = \frac{-2}{x_o^2}\int_{x_o}^{0} y^2dy = \frac{2x_o}{3}$$

Podemos notar que el valor devuelto no debe ser necesariemente posittivo o acotado (como las probabilidades) pero si debe ser consistente al contexo del problema. En este caso, el valor esperado se encuentra en el intervalo donde Y está definido (el intervalo $[x_o, 0]$) y eso era lo obvio que debía suceder.

c) Análogamente al caso anterior, dado un valor para Y, podemos obtener el valor esperado para la variable X calculando su esperanza condicional $\mathbb{E}(X|Y = y_o)$. Recordamos que; dado $Y = y_o$, $x \in (\infty, y_o]$, entonces:

$$\mathbb{E}(X|Y = y_o) = \int_{-\infty}^{y_o} x \cdot f(x|Y = y_o)dx = \int_{-\infty}^{y_o} xe^{x-y_o}dx$$

$$= e^{-y_o} \int_{-\infty}^{y_o} xe^{x}dx = e^{-y_o}(y_o e^{y_o} - e^{y_o}) = y_o - 1$$

Propuesto: Considere $g(x_o) = \mathbb{E}(Y|X = x_o)$ y $h(y_o) = \mathbb{E}(X|Y = y_o)$ dos funciones univariables de X e Y, respectivamente. Usando las densidades marginales para estas variables, muestre que $\mathbb{E}(g(X)) = \mathbb{E}(Y)$, y que $\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(X)$