Auxiliar 9

Que cortas las vacaciones y que largo el semestre

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

- Sean X, Y dos variables aleatorias, se define la **covarianza** de X e Y como:

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

- Sean X, Y dos variables, aleatorias. Se tiene:

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

- Sean X,Y dos variables aleatorias, entonces:

$$\text{X,Y independientes} \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$$

- Sean X, Y variables aleatorias. Se define la **correlación** de X e Y como:

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

P1. Sea X, Y dos variables aleatorias con medias μ_X, μ_Y respectivamente. Demuestre que:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

P2. Sea X una variable aleatoria que se distribuye uniformemente en el intervalo (0,1). ¿Están las variables aleatorias X y |1/2 - X| incorreladas?

P3. Sean U y V variables aleatorias con igual media e igual varianza. Utilizando estas variables, obtenga dos variables aleatorias incorreladas.

P4. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con la siguiente distribución conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar el coeficiente de correlación entre X e Y.

Soluciones:

P1. Ocuparemos la caracterización de la varianza en función de los momentos de primer y segundo orden de la variable aleatoria. Es decir, si X es variable aleatoria, entonces:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Ahora notamos que si X e Y son variables aleatorias, entonces $X+Y$ también lo son, por lo tanto:

$$Var(X+Y) = \mathbb{E}([X+Y]^2) - \mathbb{E}(X+Y)^2$$

$$= \mathbb{E}(X^2+2XY+Y^2) - (\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))^2 = \mathbb{E}(X^2+2XY+Y^2) - (\mathbb{E}(X)^2+2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(Y)^2$$

Donde los términos X^2, Y^2 y $-2XY$ se separan gracias a la linealidad de $\mathbb{E}$ (notar que $\mathbb{E}(XY)$ no necesariamente separará las esperanzas, pues no sabemos si existe dependencia o no entre las variables). Entonces, reagrupando términos:

$$Var(X+Y) = [\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2] + [\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2] + 2[\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)]$$

$$= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

P2. Para estudiar la correlación de estas variables, veremos cómo es primero su covarianza, recordemos que la densidad de una variable uniforme entre a y b es $\frac{1}{b-a}$, en este caso es $f_X = 1$ entre 0 y 1, y $f_X = 0$ en cualquier otro valor:

$$Cov\left(X, \left|\frac{1}{2} - X\right|\right) = \mathbb{E}\left[X \cdot \left|\frac{1}{2} - X\right|\right] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{2} - X\right|\right]$$

Calculemos por separado:

$$\mathbb{E}\left[X \cdot \left|\frac{1}{2} - X\right|\right] = \int_{\mathbb{R}} x \left|\frac{1}{2} - x\right| f_X(x)dx = \int_0^1 x \left|\frac{1}{2} - x\right| dx$$

$$= \int_0^{1/2} x \left(\frac{1}{2} - x\right) dx - \int_{1/2}^1 x \left(\frac{1}{2} - x\right) dx = \frac{1}{8}$$

La esperanza de una uniforme es el punto medio del intervalo, por lo tanto:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$$

Por último:

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{2} - X\right|\right] = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{2} - x\right| f_X(x)dx = \int_0^1 \left|\frac{1}{2} - x\right| dx$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x\right) dx - \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{2} - x\right) dx = \frac{1}{4}$$

Luego, reemplazando en la ecuación inicial de covarianza:

$$Cov\left(X, \left|\frac{1}{2} - X\right|\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0$$

Por lo tanto, como la covarianza es cero, el coeficiente de correlación también es cero. Se dice que las variables son **incorreladas**. (Notemos que este es otro ejemplo en que la covarianzza es igual a cero pero las variables son, evidentemente, dependientes una de la otra.)

P3. Definamos las variables $X = U + V$ e $Y = U - V$. Recordemos que U y V tienen igual media y varianza, sean μ y σ^2 esos valores. Entonces tenemos que:

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$= \mathbb{E}[(U+V)(U-V)] - (\mathbb{E}[U+V]\mathbb{E}[U-V]) = \mathbb{E}[U^2 - V^2] - \Big(\mathbb{E}[U]^2 - \mathbb{E}[V]^2\Big)$$
$$= \Big(\mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[U]^2\Big) - \Big(\mathbb{E}[V^2] - \mathbb{E}[V]^2\Big) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$$

Por lo tanto X e Y están incorreladas.

P4. Calculemos las densidaddes marginales de X e Y:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \int_{-x}^{x} dy = 2x$$

$$_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \int_{|y|}^{1} dx = 1 - |y|$$

Luego tenemos que:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 + y & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Con esta información podemos calcular las esperanzas de las variales por separado. De la siguiente forma:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_Y(y)dy = \int_0^1 y \cdot (1-y)dy + \int_{-1}^{0} y \cdot (1+y)dy$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$$

Dado que $\mathbb{E}(Y) = 0$, entonces $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$, por lo tanto:

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} xy \cdot f(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} xy\, dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 x \left(\int_{-x}^{x} y\, dy\right) dx = \int_0^1 x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(-x)^2}{2}\right) dx = 0$$

Luego $Cov(X,Y) = 0$, entonces también lo es la correlación.