Auxiliar 8

Parito & C2

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

- Si $F(y)$ es una función de **distribución** de la variable aleatoria Y entonces:
  - $\lim_{y\to-\infty} F(y) = 0$
  - $\lim_{y\to\infty} F(y) = 1$
  - $F(y)$ no es decreciente en la variable y.
  - $F(y)$ es contínua por la derecha.
- Si $F(y)$ es función de **distribución** para una v.a. contínua Y. Entonces:

$$f(y) = \frac{d}{dy}F(y) = F'(y)$$

  Se denomina función de **densidad** para la variable aleatoria Y, se tiene que:

$$\mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \int_a^b f(y)dy$$

- Sean Y_1, Y_2 variablesa aleatorias con distribución conjunta $F(y_1, y_2)$. Si existe una función no negativa $f(y_1, y_2)$ tal que:

$$F(y_1, y_2) = \mathbb{P}(Y_1 < y_1, Y_2 < y_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2} f(t_1, t_2)dt_1dt_2$$

  Entonces se dice que Y_1, Y_2 son v.a. conjuntamente contínuas. La función $f(y_1, y_2)$ recibe el nom bre de **densidad conjunta**.

- Sean Y_1, Y_2 v.a. conjuntamente contínuas, con densidad conjunta $f(y_1, y_2)$. Se definen las **funciones de densidad marginal** de Y_1 e Y_2 como:

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)dy_2$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)dy_1$$

- Sean Y_1, Y_2 v.a. con densidad conjunta $f(y_1, y_2)$ y densidades marginales $f_{Y_1}(y_1)$, $f_{Y_2}(y_2)$. Se ddefine la **densidad condicionada** de Y_1 dado $Y_2 = y_2$ como:

$$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_{Y_2}(y_2)}$$

  siempre que $f_{Y_2}(y_2) > 0$. DDe manera análoga se determina $f(y_2|y_1)$.

- **Teorema:** si Y_1, Y_2 son v.a. contínuas con densidad $f(y_1, y_2)$ y funciones marginales $f_{Y_1}(y_1)$ y $f_{Y_2}(y_2)$. Entonces se dice que Y_1 e Y_2 son **independientes** si, y sólo si;

$$f(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$$

  Para todo par de números reales (y_1, y_2).

P1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- ¿Son X e Y independientes?
- Calcule $\mathbb{P}(Y < kX)$, $\forall\ k$.

P2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y} & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcule las densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

P3. sea $f(x,y) = cye^x$ para $x \leq y \leq 0$; $f(x,y) = 0$ para el resto.

a) Calcule c para que la función anterior sea una densidad conjunta para los vectores (x, y). Conociendo c, obtenga las funciones de distribución conjunta, marginales y condicionadas.

b) Dado $x = x_o$ fijo, determine la esperanza de Y como variable aleatoria.

c) Dado $y = y_o$ fijo determine la esperanza de X como variable aleatoria.