Auxiliar 7

Preparación control 2

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

Decimos que una v.a. discreta X sigue una distribución de **Poisson** de parámetro $\lambda > 0$, si la distribución de X está dada por

$$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Para todo $k \in \{0, 1, 2...\}$. En este caso decimos $X \sim Poisson(\lambda)$.

Si $F(y)$ es una función de **distribución** de la variable aleatoria Y entonces:

- $\lim_{y\to-\infty} F(y) = 0$
- $\lim_{y\to\infty} F(y) = 1$
- $F(y)$ no es decreciente en la variable y.
- $F(y)$ es contínua por la derecha.

Si $F(y)$ es función de **distribución** para una v.a. contínua Y. Entonces:

$$f(y) = \frac{d}{dy}F(y) = F'(y)$$

Se denomina función de **densidad** para la variable aleatoria Y, se tiene que:

$$\mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \int_a^b f(y)dy$$

La **función generadora de momentos** $m(t)$ para una variable aleatoria Y se define como $m(t) = \mathbb{E}(e^{tY})$. Además cumple que:

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}m(t)\right|_{y=0} = \mu_k'$$

Donde μ_k' es el k-ésimo momento de la variable Y.

[Desigualdad de Tchebysheff] Sea Y una variable aleatoria con media finita μ y varianza σ^2. Entonces, para cualquier $k > 0$:

$$\mathbb{P}(|Y-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias discretas. La **función de probabilidad conjunta** (o bivariante) para Y_1 y Y_2 está dada por:

$$P_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = \mathbb{P}(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$$

La **función de distribución marginal** se define como:

$$P_{Y_1}(y) = \sum_{y_2} P_{Y_1Y_2}(Y_1 = y, Y_2 = y_2)$$

P1. Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos $g_X(t) = (1 - 0{,}25t)^{-12}$. Supongamos que X modela la variable que indica la cantidad de ejercicios que debe hacer un estudiante para obtener buenas calificaciones en el control del Lunes.
De un intervalo para X, de cantidades de ejercicios para que un estudiante tenga una probabilidad mayor o igual al 99 %, es decir, encuentre x_1 y x_2 para que; $\mathbb{P}(x_1 < X < x_2) \geq 0{,}99$.

P2. *a*) Sean X,Y variables aleatorias con función de probabilidad conjunta:

$$r_{ij} = C\frac{i+j}{i!j!}\theta^{i+j}$$

para $i, j \geq 0$ donde $\theta > 0$ es una constante. Encuentre C y las distribuciones marginales de X e Y.

b) La función $h_{ij} = C\alpha^i\beta^j$ para $i, j \in \mathbb{N}$ y $0 < \alpha, \beta < 1$. Halle el valor de C para que h_{ij} sea una función de probabilidad.

c) ¿Es $p_{ij} = (0{,}5)^{i+j}$ para $i, j \in \{0, 1, 2, ...\}$ una función de probabilidad? Si la respuesta es positiva, calcule $\mathbb{P}(1 \leq i \leq 3, j \geq 2)$.

P3. Determine el valor k para que cada una de las siguientes funciones sean función de densidad:

a) $f(x) = kxe^{-kx}$, para todo $x > 0$.

b) $f(x) = \frac{k}{\sqrt{1-x}}$, para todo $x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

c) $f(x) = \frac{k}{(1+x^2)}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

P4. La función de densidad de una variable aleatoria ξ viene determinada por:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{16}xe^{-\frac{x}{4}}\,\mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

Determine la FGM para la v.a. ξ, y utilícela para encontrar la esperanza y la varianza.

P5. Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallas antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es 8:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

b) ¿y de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?

P6. Sea Z una variable aleatoria de distribución uniforme entre a y un valor b, $a, b \in \mathbb{R}$, es decir $Z \sim U(a, b)$, determine los valores de $a < b$ para que la siguiente desigualdad se cumpla:

$$\mathbb{P}[\pi(1 - \sqrt{3}) < Z < \pi(1 + \sqrt{3})] \geq 0.\bar{8}$$