

Auxiliar 5

Edición The Avenger: EndGame

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Ant-Man López, Thanos Hernández

L1. Sea φ_X una función que depende de la variable aleatoria X . Se dice que φ_X es la *Función Generadora de Momentos* (FGM) y se define de la siguiente manera:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

y cumple las siguientes propiedades:

- $\varphi'_X(0) = \mathbb{E}(X)$
- $\varphi''_X(0) = \mathbb{E}(X^2)$

a) Encuentre la FGM de las siguientes distribuciones:

- $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ con $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0, 1)$.
- $X \sim \text{Geométrica}(p)$ con $p \in (0, 1)$.

b) Sea $\lambda \in (0, \infty)$. Decimos que X distribuye de forma *Poisson* de parámetro λ , y lo denotamos como $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ si:

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- Encuentre la FGM de la distribución de *Poisson* y ocúpela para calcular $\mathbb{E}(X)$ y $\text{Var}(X)$.
 - si $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $Y = a + bX$. Determine φ_Y en función de φ_X .
- c) Sean X e Y dos variables aleatorias independientes, con FGM's φ_X y φ_Y respectivamente. Sea $Z = X + Y$. Determine φ_Z en función de φ_Y y φ_X .

L2. Sean $\lambda, \mu \in (0, \infty)$ dos números positivos cualesquiera. Sean $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$. Encuentre la distribución de $Z = X + Y$, es decir, calcule $\mathbb{P}(Z = k)$.

L3. Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que:

$$\mathbb{E}(X^n) = \lambda \mathbb{E}((X + 1)^{n-1})$$

Pauta.

- L1.** a) Encontrar la FGM de las siguientes distribuciones: Recordemos que la esperanza de una función de mi variable aleatoria (en caso discreto) tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k \in \mathcal{R}} f(k) \mathbb{P}(X = k)$$

Donde $\mathcal{R}$ es el rango de mi variable aleatoria.

1. $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ con $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0, 1)$:

Partamos por la definición de la FGM:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \mathbb{P}(X = k)$$

Donde la suma sale de la definición de esperanza de una función. Como el rango de una binomial son los números naturales del 0 al n .

Recordemos que la probabilidad de una v.a. binomial(n,p) está dada por:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Entonces, reemplazando en la esperanza:

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + 1 - p)^n$$

Donde la última igualdad surge de la fórmula de "Binomio de Newton" para las potencias de un binomio. Entonces la FGM de una Binomial es:

$$\varphi_X(t) = (pe^t + 1 - p)^n$$

2. $X \sim \text{Geométrica}(p)$ con $p \in (0, 1)$:

Para el caso de distribución geométrica, lo único que cambia en el cálculo de la FGM es la forma que toma la probabilidad. En el caso de la geométrica, sabemos que:

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Reemplazando eso en la esperanza que define la FGM:

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} (1-p)^{k-1}$$

Donde la suma va de 1 hasta ∞ , pues ese es el rango de la geométrica. Haciendo un cambio de variable, podemos hacer que esta suma parta desde el 0 y ocupar la serie geométrica:

$$p \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{\infty} e^{t(k+1)} (1-p)^k = pe^t \sum_{k=0}^{\infty} (e^t(1-p))^k = \frac{pe^t}{1 - e^t(1-p)}$$

Entonces la FGM de la distribución geométrica es:

$$\varphi_X(t) = \frac{pe^t}{1 - e^t(1 - p)}$$

- b) Para calcular la FGM de la Poisson, notemos que su rango son todo el conjunto de los números naturales junto al cero, por lo tanto, su FGM se define como:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}\end{aligned}$$

Donde la última suma que se puede notar es la serie de la función exponencial (e^x) que converge para cualquier valor real.

Para el cálculo de la esperanza y la varianza, utilizaremos las propiedades de la FGM:

$$\varphi'_X(0) = \mathbb{E}(X), \quad \varphi''_X(0) = \mathbb{E}(X^2)$$

Partamos derivando la FGM para calcular la esperanza:

$$\varphi'_X(t) = \frac{d\varphi_X(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{\lambda(e^t - 1)}) = e^{\lambda(e^t - 1)}(\lambda e^t)$$

Reemplazando en 0:

$$\begin{aligned}\varphi'_X(0) &= e^{\lambda(e^0 - 1)}(\lambda e^0) = e^{\lambda(1 - 1)}(\lambda 1) = \lambda e^0 = \lambda \\ \Rightarrow \mathbb{E}(X) &= \varphi'_X(0) = \lambda\end{aligned}$$

Ahora para calcular la varianza de la distribución Poisson, ocuparemos la caracterización de varianza: $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. Ya sabiendo la esperanza, sólo basta conocer el término $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\varphi''_X(t) = \frac{d\varphi'_X(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{\lambda(e^t - 1)}(\lambda e^t))$$

Por la regla de derivación del producto, tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi''_X(t) &= (\lambda e^t) \frac{d}{dt}(e^{\lambda(e^t - 1)}) + e^{\lambda(e^t - 1)} \frac{d}{dt}(\lambda e^t) \\ &= (\lambda e^t)(e^{\lambda(e^t - 1)}(\lambda e^t)) + e^{\lambda(e^t - 1)}(\lambda e^t)\end{aligned}$$

Donde la derivada del primer sumando coincidía con la calculada anteriormente. Ahora reemplazando en $t = 0$:

$$\varphi''_X(0) = (\lambda e^0)(e^{\lambda(e^0 - 1)}(\lambda e^0)) + e^{\lambda(e^0 - 1)}(\lambda e^0) = \lambda^2 + \lambda$$

Así, finalmente, obtenemos que la varianza de la Poisson, es igual a su esperanza:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \varphi''_X(0) - \lambda^2 = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

- c) Supongamos que tenemos X e Y dos variables aleatorias independientes (de cualquier distribución), con FGM's conocidas (φ_X, φ_Y) . Nos piden encontrar la FGM de la variable $Z = X + Y$.

Para encontrarlas haremos uso de la siguiente propiedad de la esperanza en variable aleatorias independientes.

Si X e Y son independientes, entonces para cualquier dos funciones f y g , de X e Y respectivamente, se tiene que:

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$$

Ocupando esto, acompañado de la definición de la FGM, tenemos que:

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{tZ}) = \mathbb{E}(e^{t(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{tX}e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{tX})\mathbb{E}(e^{tY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

En conclusión, si tenemos X e Y , independientes. Para $Z = X + Y$:

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

- L2.** Cuando nos piden calcular la distribución de Z , basta con mostrar cómo es $\mathbb{P}(Z = k)$, para k en el rango de Z (por lo tanto hay que definir también su rango).

Como sabemos que $Z = X + Y$, con X e Y variables Poisson (naturales de cero a infinito), por lo tanto Z puede tomar valores desde 0 (cuando $X = Y = 0$) hasta infinito (cuando alguna, X o Y es infinito). Ahora, por probabilidades totales, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X + Y = k | Y = j) \mathbb{P}(Y = j) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X + j = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k - j) \mathbb{P}(Y = j)\end{aligned}$$

Lo primero que podemos notar, es que, como sabemos la distribución de X e Y , podemos reemplazar directamente por su función de distribución en ambas probabilidades. Lo segundo que es necesario notar, es que: como es el índice j el que se está moviendo (y el k está fijo), llegará un momento en que $j > k$, por lo tanto el término $k - j$ será negativo, como la variable X es Poisson, la probabilidad de $k - j$ no estará definida, pues se "saldrá" del rango de X y quedará nula, es decir:

$$\mathbb{P}(X = k - j) = 0 \quad \forall j > k$$

Entonces, esa suma que llega hasta infinito, sumará ceros desde el $k + 1$ en adelante, por lo tanto podemos decir que la suma "se detiene" en k , pues los otros términos son nulos:

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X = k - j) \mathbb{P}(Y = j)$$

Reemplazamos por la función de distribución de las variables poisson:

$$\sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X = k - j) \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\mu} \frac{\mu^j}{j!} = e^{-\lambda-\mu} \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^{k-j}}{(k-j)!} \frac{\mu^j}{j!}$$

como el k es constante en la suma, puedo reagrupar términos, sacar todo lo que no dependa de k , y multiplicar y dividir por $k!$ de manera que me quede lo siguiente:

$$e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{j=0}^k \frac{1}{(k-j)!j!} \lambda^k \lambda^{-j} \mu^j = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \lambda^k \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j$$

Reconocemos el término de la combinatoria al interior de la suma:

$$\frac{k!}{(k-j)!j!} = \binom{k}{j}$$

Entonces, por Binomio de Newton, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \lambda^k \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \lambda^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \lambda^k \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)^k \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \lambda^k \frac{(\lambda + \mu)^k}{\lambda^k} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \end{aligned}$$

En resumen:

$$\mathbb{P}(Z = k) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}$$

es decir, $Z \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$.

L3. Ocupando la definición de la esperanza y la función de distribución de Poisson:

$$\mathbb{E}(X^n) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Notamos que uno de los k de la expresión k^n se cancela con el primer término de $k!$, entonces queda:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

Ahora, notamos que el primer término de esta suma es 0, pues todo está multiplicado por k^{n-1} , por lo tanto, podemos hacer partir esta suma desde $k = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

Por último, realizamos un cambio de variable en el índice de la suma:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \\
& = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n-1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{n-1} \mathbb{P}(X = k) = \lambda \mathbb{E}((X+1)^{n-1})
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad sale de la definición de esperanza.

Así, concluimos que:

$$\mathbb{E}(X^n) = \lambda \mathbb{E}((X+1)^{n-1})$$