

## Auxiliar 5

Edición The Avenger: EndGame

**Profesor: Vicente Acuña**  
**Auxiliares: Ant-Man López, Thanos Hernández**

**L1.** Sea  $\varphi_X$  una función que depende de la variable aleatoria  $X$ . Se dice que  $\varphi_X$  es la *Función Generadora de Momentos* (FGM) y se define de la siguiente manera:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

y cumple las siguientes propiedades:

- $\varphi'_X(0) = \mathbb{E}(X)$
- $\varphi''_X(0) = \mathbb{E}(X^2)$

a) Encuentre la FGM de las siguientes distribuciones:

- $X \sim \text{Binomial}(n, p)$  con  $n \in \mathbb{N}$  y  $p \in (0, 1)$ .
- $X \sim \text{Geométrica}(p)$  con  $p \in (0, 1)$ .

b) Sea  $\lambda \in (0, \infty)$ . Decimos que  $X$  distribuye de forma *Poisson* de parámetro  $\lambda$ , y lo denotamos como  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$  si:

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

- Encuentre la FGM de la distribución de *Poisson* y ocúpela para calcular  $\mathbb{E}(X)$  y  $\text{Var}(X)$ .
  - si  $a, b \in \mathbb{R}$  y sea  $Y = a + bX$ . Determine  $\varphi_Y$  en función de  $\varphi_X$ .
- c) Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias independientes, con FGM's  $\varphi_X$  y  $\varphi_Y$  respectivamente. Sea  $Z = X + Y$ . Determine  $\varphi_Z$  en función de  $\varphi_Y$  y  $\varphi_X$ .

**L2.** Sean  $\lambda, \mu \in (0, \infty)$  dos números positivos cualesquiera. Sean  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$  e  $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ . Encuentre la distribución de  $Z = X + Y$ , es decir, calcule  $\mathbb{P}(Z = k)$ .

**L3.** Sea  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$  y sea  $n \in \mathbb{N}$ . Pruebe que:

$$\mathbb{E}(X^n) = \lambda \mathbb{E}((X + 1)^{n-1})$$