

Auxiliar 4

Variables aleatorias discretas

Profesor: Vicente Acuña

Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

E1. Decimos que una va. Z tiene distribución Geométrica(p) si es que, para $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Z = k) = (1 - p)^{k-1}p \quad (1)$$

Sea Y una va. Binomial(n, p) y Z una va. Geométrica(p)

- a) Calcule la esperanza y varianza de Y
- b) Calcule la esperanza y varianza de Z

E2. Se lanza consecutivamente un dado hasta que aparece por primera vez un as. Suponiendo que en el primer lanzamiento no hemos obtenido un as, calcular la probabilidad de que sean necesarios más de tres lanzamientos.

E3. Sea Z una variable aleatoria Geométrica, demuestre que cumple:

$$\mathbb{P}(Z = n + m | Z > m) = \mathbb{P}(Z = n) \quad (2)$$

A esta se le llama la propiedad de pérdida de memoria.

Pauta

E1. a) Calculemos la esperanza de Y . La fórmula para calcular esperanzas discretas es:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(Y = k)$$

Donde la suma se hace sobre todos los valores posibles para Y . En este caso, Y distribuye $\text{Binomial}(n, p)$ entonces sabemos cómo expresar las probabilidades:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

y reemplazamos:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Primero notemos que en el primer término de la suma, es decir, cuando $k = 0$, todo el sumando es igual a 0, esto pues parto multiplicando por k al inicio.

Por lo tanto da lo mismo si la suma la partimos de 0 o de 1. Para facilitar el cálculo, partiremos de 1:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Nuevamente hacemos un cambio de variable en la suma, diremos que $j = k - 1$, como k partía de 1, entonces j partirá de 0. Si k llegaba hasta n , entonces j llegará hasta $n - 1$. por último, reemplazo todos los k por $j + 1$:

$$\mathbb{E}(Y) = np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j}$$

$$np(p + (1-p))^{n-1} = np \times 1^{n-1} = np$$

En la última parte volvemos a ocupar *Binomio de Newton* para pasar de la sumatoria a la potencia. Así obtenemos que si Y distribuye $\text{Binomial}(n, p)$, entonces: $\mathbb{E}(Y) = np$.

Veamos qué pasa con la varianza. Sabemos que la varianza se puede calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))^2) \\ &= \mathbb{E}(Y^2 - 2Y\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2) = \mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$$

De la parte anterior aprendimos que $\mathbb{E}(Y) = np$, entonces:

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (np)^2$$

Por lo tanto, calculemos el término $\mathbb{E}(Y^2)$:

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{k=0}^n k^2 \mathbb{P}(Y = k)$$

Por el mismo argumento que en la parte anterior, podemos partir esta suma desde 1 en vez que desde 0.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Hacemos cambio de variable en la suma; $m = k - 1$, entonces la suma partirá de 0 hasta $n - 1$, y $k = m + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)n \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} p^{m+1} (1-p)^{n-1-m} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)n \binom{n-1}{m} p^{m+1} (1-p)^{n-1-m} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} mn \binom{n-1}{m} p^{m+1} (1-p)^{n-1-m} + n \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^{m+1} (1-p)^{n-1-m} \\ &= np \sum_{m=0}^{n-1} m \binom{n-1}{m} p^m (1-p)^{(n-1)-m} + np \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m (1-p)^{(n-1)-m} \\ &= np \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m (1-p)^{(n-1)-m} + np(p + (1-p))^{n-1} \\ &= np \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m (1-p)^{(n-1)-m} + np \end{aligned}$$

Podemos notar que la suma que queda es m por un término que reconocemos como la probabilidad de una *Binomial* pero de parámetros $n - 1$ y p . En particular es $\mathbb{E}(N)$ si N distribuye *Binomial*($n - 1, p$). Es decir:

$$\mathbb{E}(Y^2) = np\mathbb{E}(\text{Bin}(n - 1, p)) + np$$

Pero ya sabemos que la esperanza de una binomial es sólo multiplicar sus parámetros.

$$\mathbb{E}(Y^2) = np(n-1)p + p = (np)^2 - np^2 + np$$

Finalmente:

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (np)^2 = np - np^2$$

$$Var(Y) = np(1-p)$$

b) Sea Z una variable que distribuye *Geométrica* de parámetro p ($Geom(p)$). Sabemos que:

$$\mathbb{P}(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Con esto calcularemos la esperanza de Z . Recordemos que esta variable toma valores en todos los naturales, por lo tanto, a diferencia de la parte **a)**, en vez de una suma finita tendremos una serie. Por supuesto que tendremos que verificar que la serie efectivamente converge.

Para calcular esperanza ocupamos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} k \mathbb{P}(Z = k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} kp(1-p)^{k-1} = p \sum_{k \in \mathbb{N}} k(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

El siguiente truco requiere de mucha atención y comprensión, para resolver esta serie haremos uso de las propiedades de las series de potencias. Más particularmente, de los polinomios infinitos.

Sabemos, de cursos anteriores, que la expresión $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k$ converge sólo si $|x| < 1$, más aún, sabemos que la convergencia en este radio es uniforme y hasta sabemos el valor al que converge:

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Para suerte de nosotros, el valor p (que originalmente es el parámetro de una variable *Bernoulli*) se encuentra en el intervalo $(0, 1)$, por lo tanto el valor $1-p$ también se encuentra en el intervalo $(0, 1)$. Por lo tanto, todos estos valores son evaluables en la función F , más aún, podemos derivar esta función y las propiedades se mantendrán para estos valores:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k \in \mathbb{N}} x^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} kx^{k-1}$$

Pero además:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k \in \mathbb{N}} x^k = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Por lo tanto, tenemos la igualdad:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} kx^{k-1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{d}{dx} x^k = \frac{d}{dx} \sum_{k \in \mathbb{N}} x^k = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Sólamamente basta reemplazar x por el valor que necesitamos, $1 - p$:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{(1 - (1-p))^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Z) = p \sum_{k \in \mathbb{N}} k(1-p)^{k-1} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Para ver la varianza ocuparemos que:

$$Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$$

y calculemos el valor de $\mathbb{E}(Z^2)$:

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 (1-p)^{k-1}$$

Por definición, las variables geométricas parten del término 1 (el cero no se considera en los naturales), esto nace de la siguiente interpretación; "la variable geométrica me indica la cantidad mínima de lanzamientos de una moneda que debo hacer para obtener de resultado una cara, como mínimo debo hacer un lanzamiento para sacar una cara". Entonces:

$$\mathbb{E}(Z^2) = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1}$$

Haremos un cambio de variable en la suma, diremos que $i = k - 1$, por lo tanto la suma partirá desde 0 hasta infinito, cambiando todos los k por $i + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2) &= p \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^2 (1-p)^i \\ &= p \sum_{i=0}^{\infty} (i^2 + 2i + 1)(1-p)^i \\ &= p \left(\sum_{i=0}^{\infty} i^2 (1-p)^i + 2 \sum_{i=0}^{\infty} i(1-p)^i + \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \right) \end{aligned}$$

Factorizaré el término $(1-p)$ a cada suma para que me salga un $i - 1$ en los exponentes:

$$\mathbb{E}(Z^2) = p(1-p) \left(\sum_{i=0}^{\infty} i^2 (1-p)^{i-1} + \frac{2}{p} \sum_{i=0}^{\infty} ip(1-p)^{i-1} + \frac{1}{(1-p)} \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \right)$$

Ahora podemos identificar ciertos términos conocidos: la primera serie es casi exactamente igual con la que partimos, por lo tanto es igual a $\frac{\mathbb{E}(Z^2)}{p}$, la segunda serie es la serie de la esperanza de Z que ya calculamos y sabemos que es igual a $\frac{1}{p}$, la última serie es sólo una geométrica que converge pues $1 - p \in (0, 1)$:

$$\mathbb{E}(Z^2) = p(1-p) \left(\frac{\mathbb{E}(Z^2)}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p(1-p)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (1-p)\mathbb{E}(Z^2) + \frac{2(1-p)}{p} + 1 \\
\Rightarrow \quad \mathbb{E}(Z^2) - (1-p)\mathbb{E}(Z^2) &= \frac{2(1-p)}{p} + 1 \\
p\mathbb{E}(Z^2) &= \frac{2(1-p)}{p} + 1 \\
\mathbb{E}(Z^2) &= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Finalmente reemplazamos:

$$\begin{aligned}
Var(Z) &= \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{2(1-p) + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \\
Var(Z) &= \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

(**Propuesto:** Intente calcular $\mathbb{E}(Z^2)$ ocupando las derivadas de la función $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k$.)

E2. Notemos que la condición sólo nos pide sacar un As, entonces sólo tenemos dos opciones. Vamos a definir la siguiente variable: L_i : es la variable 'Lanzamiento i-ésimo', que toma valores {As, No As} puesto que en realidad no me importa qué valores está agarrando, sólo si es el As o no.

Como sólo tengo dos opciones, podemos probar que la variable L es *Bernoulli* pero ¿de qué parámetro? la probabilidad de sacar un As en el dado es de $\frac{1}{6}$, y el resto tiene probabilidad $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. por lo tanto L tiene distribución *Bernoulli*($\frac{1}{6}$).

Ahora si definimos una nueva variable aleatoria:

- X : es la variable que indica la primera vez que L encuentra un As.

Es exactamente la definición de una variable geométrica con el parámetro p correspondiente a la *Bernoulli*, en este caso $\frac{1}{6}$. Entonces X distribuye *Geom*($\frac{1}{6}$).

Queremos calcular la probabilidad de tener al menos 3 lanzamientos, en otras palabras, es calcular:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X > 3) \\
&= \sum_{k=4}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)
\end{aligned}$$

Pero como ya tenemos distribución para X podemos reemplazar por su función característica de masa:

$$\mathbb{P}(X > 3) = \sum_{k=4}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=4}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$$

Haremos un cambio de variable para resolver la suma, diremos que $m = k - 4$, así la suma

partirá desde el 0 hasta ∞ , basta con reemplazar cada k por $m + 4$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 3) &= \sum_{k=4}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^{m+4-1} \\ &= p \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^{m+3} = p(1-p)^3 \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m\end{aligned}$$

Y esa serie la podemos resolver sin dificultad pues, como $1-p = \frac{5}{6} \leq 1$, la serie geométrica converge:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 3) &= p(1-p)^3 \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m = p(1-p)^3 \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= p(1-p)^3 \frac{1}{p} = (1-p)^3\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\mathbb{P}(X > 3) = (1-p)^3$.

En general, el resultado es cierto para todo natural mayor que cero, es decir: si X es variable aleatoria *Geométrica*(p), entonces $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n \quad \forall n \geq 1$. Resultado que se verá en el ejercicio siguiente.

E3. Para demostrar la pérdida de memoria notemos que, si Z es una variable geométrica de parámetro p , y $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Z > m) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq m)$$

Además:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leq m) &= \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{k=1}^m p(1-p)^{k-1} \\ &= p \sum_{j=0}^{m-1} (1-p)^j = p \frac{1 - (1-p)^m}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^m \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(Z \leq m) = 1 - (1-p)^m \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(Z > m) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq m) = 1 - (1 - (1-p)^m) = (1-p)^m\end{aligned}$$

Ahora ocupando la definición de probabilidad condicionada:

$$\mathbb{P}(Z = n + m \mid Z > m) = \frac{\mathbb{P}(Z = n + m, Z > m)}{\mathbb{P}(Z > m)}$$

Ahora separaremos en 2 casos, el primer caso es cuando $n = 0$: si eso pasa entonces $Z = n + m \Rightarrow Z = m$ por lo tanto, el evento $\{Z = m + n\} \cap \{Z > m\}$ es vacío, pues es falso que $m > m$ con desigualdad estricta, por lo tanto:

$$\mathbb{P}(Z = n + m \mid Z > m) = \frac{\mathbb{P}(Z = n + m, Z > m)}{\mathbb{P}(Z > m)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(Z > m)} = 0 = \mathbb{P}(Z = n)$$

Donde la última igualdad se tiene de que $\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z = 0) = 0$ porque las variables geométricas toman valores naturales, sin el cero.

El segundo caso se da cuando $n > 0$ (mayor estricto que cero) pues en ese caso $n + m > m$

por lo tanto el evento $Z > m$ está contenido en el otro, es decir, $\{Z = n + m\} \cap \{Z > m\} = \{Z = n + m\}$ y:

$$\mathbb{P}(Z = n + m, Z > m) = \mathbb{P}(Z = m + n)$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = n + m \mid Z > m) &= \frac{\mathbb{P}(Z = n + m, Z > m)}{\mathbb{P}(Z > m)} = \frac{\mathbb{P}(Z = n + m)}{\mathbb{P}(Z > m)} \\ &= \frac{p(1-p)^{n+m}}{(1-p)^m} = p(1-p)^{n+m-m} = p(1-p)^n = \mathbb{P}(Z = n)\end{aligned}$$

Así concluimos la propiedad de pérdida de memoria para las variables geométricas.

(**Propuesto:** Haga la misma demostración pero cambie las igualdades por desigualdades no estrictas, es decir $Z = n + m$ y $Z = n$, por $Z \geq n + m$ y $Z \geq n$ respectivamente.)