Auxiliar 1

Función probabilidad y problemas de conteo.

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Sebastián López, Bruno Hernández

P1. Hay que colocar a 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

P2. A partir de 5 matemáticos y 7 físicos hay que construir una comisión de investigación de 2 matemáticos y 3 físicos, ¿De cuántas formas podría hacerse si:

a) todos son elegibles.

b) Juan, uno de los físicos, debe siempre estar en la comisión.

c) Pablo y Nicolás, dos de los matemáticos, se odian a muerte, nunca pueden quedar ambos juntos en la comisión.

P3. Una torre es una pieza de ajedrez que puede atacar a piezas en su mimsa fila o columna. Dos torres son indistinguibles si no puedo diferenciar a qué lado del tablero atacan, por lo tanto, es posible que se ataquen entre si.

a) Sea $k \in \mathbb{N}$ ¿ De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $k \times k$ casilleros de modo tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

b) Sean $k, n \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero rectangular de $n \times n$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

c) Sean $k, n, m \in \mathbb{N}$ ¿De cuántas maneras se pueden ubicar k torres indistinguibles en un tablero de $n \times m$ casilleros de manera tal que ninguna torre pueda atacar a otra?

P4. Sean A y B dos sucesos cualesquiera y $(A_i)_{i=1}^N$ una sucesión de eventos, muestre que:

a) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B)$

b) Sea $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A_i) - (N-1) \leq \mathbb{P}(\cap_{i=1}^N A_i)$

c) Si $\mathbb{P}(B) = 1$, entonces $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$

Soluciones:

P1. Podemos notar que en total tenemos que ordenar a 9 personas en 9 posiciones. En tales 9 posiciones hay 4 en las que son pares (2, 4, 6 y 8), la misma cantidad que el número de mujeres por ordenar, por lo tanto basta con realizar una permutación para saber cuántos ordenes existen para las mujeres:

$$P_4 = 4!$$

sin embargo, por cada configuración de mujeres existe una que considera el orden de los hombres, como los espacios que sobran (impares) son la misma cantidad que hombres por ordenar, entonces las formas de ordenar hombre también equivalen a una permutación, esta vez es: $P_5 = 5!$. Por lo tanto, gracias al principio de la multiplicación, hay:

$$P_4 \times P_5 = 4! \times 5! = 2880$$

formas de ordenar a 4 mujeres y 5 hombres tal que las mujeres queden en los espacios pares.

P2. *a)* Usando el principio de la multiplicación, podemos separar la elección de matemáticos y la elección de físicos como eventos independietes y calcularlos por separados, luego de haber hecho esto teneos que:

$$\text{Total de formas} = \text{Opciones de matemmáticos} \times \text{Opciones de físicos}$$

Basta con elegir 2 matemáticos de un conjunto de 5 de ellos, como en esta elección no importa el orden en que se elijan, la cantidad de formas va a estar determinada por un coeficiente binomial (combinatoria):

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Así mismo con el conjunto de los físicos; sin importatr el orden, elegimos 3 físicos de un total de 7 de ellos:

$$C_3^7 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

Finalmente, por lo ya dicho:

$$\text{Formas totales} = C_2^5 \times C_3^7 = 10 \times 35 = 350$$

b) Siguiendo la misma lógica de la parte **a)**, ocupando el principio de la multiplicación, notamos que las maneras de seleccionar matemáticos no cambian. Sólo nos queda recalcular las formas de seleccionar físicos agregando la nueva condición dada: Para esto fijamos uno de los cupos para la comisión, pues está reservado para Juan, por lo tanto debemos elegir a los 2 físicos restantes de un total de 6 de ellos (todos menos Juan):

$$C_2^6 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

Por lo tanto, recordando el resultado de la parte **a)**, en que las formas de sacar matemáticos eran C_2^5:

$$\text{Formas totales} = C_2^5 \times C_2^6 = 10 \times 15 = 150$$

c) En este caso, las formas de elegir los físicos no cambian de la parte **a)**, por lo tanto sólo tenemos que calcular las formas de elegir a los matemáticos.
Para ello, del total de casos, descontamos el caso perjudicial en el que elegimos a ambos en la comisión. Como sólo hay dos matemáticos en la comisión, existe sólo una forma en que estas dos personas queden juntas, entonces:

$$\text{Casos favorables} = \text{Casos totales matemáticos} - 1$$

$$= C_2^5 - 1 = \binom{5}{2} - 1$$

Finalmente la cantidad de formas de elección en este caso son:

$$\text{Casos totales} = (C_2^5 - 1) \times C_3^7 = (\binom{5}{2} - 1) \times \binom{7}{3} = \binom{5}{2} \times \binom{7}{3} - \binom{7}{3} = 10 \times 35 - 35 = 315$$

P3. *a)* Cada torre debe ocupar una casilla del tablero de tamaño $k \times k$, digamos que cada una de estas posiciones están dadas por (x_i, y_i) donde el valor x_i indicará la columna e y_i indica la fila de la posición de la torre i.
Como tenemos k columnas y k torres, es lógico que cada torre ocupará una columna diferente, por lo tanto, como el orden de las torres no está dicho de antemano, haré que la torre que vaya en la columna 1 sea la torre número 1; la segunda torre será la que vaya en la columna 2 y así sucesivamente.

En términos matemáticos, decimos que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\cdots$, $x_k = k$. Esto tiene sólo una forma de ser elegido, por lo tanto las formas de elegir $(x_i)_{i=1}^k$ es uno[1].

Para elegir las filas debemos tener cuidado, si la elección de las columnas es única, fue porque no fijamos condición alguna para que las torres no se toparan (asumimos que no iban a coincidir en las filas).
Para la primera torre tenemos k opciones de filas, como es la primera, no hay ota torre puesta, entonces no topará con ninguna otra. Para la segunda torre, tenemos $(k-1)$ opciones de filas (todas las filas menos la fina en que colocamos la anterior). Para la trecera torre tendremos $(k-2)$ y así... para la última torre sólo nos quedará 1 sola posición, por lo tanto, gracias al principio de la multiplicación, tenemos $k(k-1)(k-2)\cdots 21 = k!$. Entonces para este caso tenemos $k!$ formas de colocar las torres.

b) Para el segundo caso tenemos un tablero más grande que el anterior. Lo primero que haremos será elegir el conjunto exacto de columnas donde estarán posicionadas las torres, es decir un subconjunto de tamaño k (cantidad de torres) de n (total de columnas), esto se puede hacer de $\binom{n}{k}$ formas.
Ahora que colocamos las torres en sus respectivas columnas (recordamos que esto se hace de sólo una forma por la parte anterior), sólo falta asignarle una fila distinta a cada torre: para la primera torre tenemos n opciones diferentes, para la segunda tendremos $(n-1)$ opciones, para la tercera tendremos $(n-2)$, en general le vamos descontando 'una menos' que la cantidad de torres que llevamos colocadas, es decir que para la torre k-ésima quedarán $(n-(k-1))$ opciones para colocar la torres.

[1] Al final de la explicación usted puede proponerse el demostrar que cualquier otra elección de las columnas equivale a una de las elecciones ya contadas.

Notemos que:

$$n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = n(n-1))\cdots(n-k+1) \times \frac{(n-k)(n-(k+1))\cdots 1}{(n-k)(n-(k+1))\cdots 1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))(n-k)\cdots 1}{(n-k)(n-(k+1))(n-(k+2))\cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Por lo tanto, ocupando el argumeto de la multiplicación; juntamos ambas elecciones (la de las colummnas y la de las filas), por lo tanto las formas totales son:

$$\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}$$

c) Ahora tenemos un tablero de $(n \times m)$, por lo tanto seguiremos la misma lógica de la parte anterior. De las m colummnas debemos elegir las k donde irán nuestras torres, como ya lo vimos; hay $\binom{m}{k}$ formas de elegir.

Ahora para elegir las filas notamos que la primera torre tiene n opciones, la segunda tiene $(n-1)$ opciones. Si seguimos así, llegamos a la misma solución de la parte anterior, es decir $\frac{n!}{(n-k)!}$. Por lo tanto el total de formas de colocar las torres es:

$$\binom{m}{k}\frac{n!}{(n-k)!}$$

Ahora, qué hubiese pasado si hubiesemos girado el tablero, y en vez de tener un tablero de $n \times m$ tuviesemos un tablero de $m \times n$? Como girar el tablero no cambia las formas de colocar las piezas, el resultado debería ser el mismo. Sin embargo los roles de filas y columnas de invirtieron, entonces la siguiente igualdad (que usted puede demostrar con matraca) se tiene:

$$\binom{n}{k}\frac{m!}{(m-k)!} = \binom{m}{k}\frac{n!}{(n-k)!}$$

P4. *a*) Para demostrar la primera desigualdad ocuparemos la monotonía de la función de probabilidad, esto es:

$$\text{Si: } A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

Además ocuparemos la propiedad mostrada en el auxiliar:

$$\forall A, B : \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Entonces, sabiendo que; si Ω es el espacio muestral, tenemos que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ y que para todo par de eventos A y B, $A \cup B \subset \Omega$. Con esto y la monotonía de $\mathbb{P}$:

$$A \cup B \subset \Omega \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$$

Ahora ocupando la descompocisión mencionada antes:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B)$$

b) Una de las formas útiles para demostrar esta desigualdad es por el método de inducción. Para eso necesitamos probar que la identidad es cierta para el caso base $N = 1$: Si $N = 1$, entonces $\sum_{i=1}^{1} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1)$ y además; $\bigcap_{i=1}^{1} A_i = A_1$. Reemplazando en la desigualdad queda:

$$\mathbb{P}(A_1) - (1 - 1) = \mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_1)$$

Lo que es cierto para cualquier conjunto.
Si buscamos el caso $N = 2$, entonces volvemos a la demostración de la parte **a)**.

Luego de haber mostrado el caso base, podemos establecer nuestra hipótesis inductiva (H.I.), afirmando que la desigualdad es cierta para algún "N"natural. Por último, para mostrar que nuestra H.I. es cierta, ocuparemos el "paso inductivo"que consiste en mostrar que la desigualdad es cierta para el caso $N + 1$, asumiendo que H.I. es cierta:

$$\sum_{i=1}^{N+1} \mathbb{P}(A_i) - ((N + 1) - 1) = \mathbb{P}(A_{N+1}) + \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_i) - (N - 1) - 1$$

En el paso anterior sólamente hemos separado el último término de la sumatoria y ocupar un 'nikita nipone' para hacer aparecer un '$N - 1$' en la suma.

$$\mathbb{P}(A_{N+1}) + \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_i) - (N - 1) - 1 = \mathbb{P}(A_{N+1}) - 1 + \{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_i) - (N - 1)\}$$

Vuelvo a reordenar, juntando el -1 con la primer término, podemos observar (al interior de las llaves) que lo que queda de sobra es exactamente nuestra H.I., por lo tanto lo podemos acotar por $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{N} A_i)$.

$$\mathbb{P}(A_{N+1}) - 1 + \{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_i) - (N - 1)\} \leq \mathbb{P}(A_{N+1}) + \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{N} A_N) - 1$$

Finalmente volvemos al caso de la parte **a)**, para verlo más claramente renombremos los conjuntos: $A_{N+1} = A$ y $\bigcap_{i=1}^{N} A_i = B$, ambos son conjuntos cualesquiera, por lo tanto la propiedad sigue siendo cierta.

$$\mathbb{P}(A_{N+1}) + \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{N} A_N) - 1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B)$$

Basta notar que $A \cap B = A_{N+1} \cap (\bigcap_{i=1}^{N} A_i) = \bigcap_{i=1}^{N+1} A_i$, con lo que mostramos la hipótesis inductiva, concluyendo que la desigualdad es cierta para cualquier colección de conjuntos indexada por algún N, natural.

c) Sabemos previamente que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, pero si un conjunto cualquiera, digamos B, tuviese probabilidad igual a 1, esto **no implica** que $B = \Omega$, sin embargo podemos tener una idea de qué tan grande es este conjunto. En particular, B será independiente a cualquier otro conjunto.
Para mostrar la igualdad usaremos la identidad de descomposición de dos conjuntos

ocupada en la parte **a)**: $\forall A$, B,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$$

Sabemos que la probabilidad de B es 1, además podemos ocupar la monotonía de la función $\mathbb{P}$, notando que:

$$B \subset (A \cup B) \subset \Omega$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(\Omega)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$$

Las desigualdades me concluyen que $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$, reemplazando en la ecuación anterior:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + 1 - 1 = \mathbb{P}(A)$$

Por lo tanto $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$.