

PAUTA Auxiliar 13,5

"Cálculo Avanzado y Aplicaciones"

P2 (a) Notemos que:

$$\frac{df}{dx} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = -2g(x)$$

Usamos la propiedad de la transformada de Fourier para derivadas:

$$\boxed{\widehat{f^{(n)}}(s) = (is)^n \widehat{f}(s)}$$

Entonces, tendremos que $\widehat{f}'(s) = is \widehat{f}(s)$, es decir;

$$\widehat{f}'(s) = is \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$$

Como la transformada de Fourier es lineal tendremos que:

$$f'(x) = -2g(x) \Rightarrow \widehat{f}'(s) = -2 \widehat{g}(s) \Rightarrow \widehat{g}(s) = -\frac{\widehat{f}'(s)}{2}$$

Entonces:

$$\boxed{\widehat{g}(s) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-|s|}} \rightarrow \text{Transformada de Fourier de } g(x) \dots$$

(b) Por definición, la extensión par $v(x,t)$ de la función $u(x,t)$ en la variable x es:

$$v(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & ; x > 0 \\ u(-x,t) & ; x < 0 \end{cases} ; t > 0$$

Veamos que ocurre con v_{tt} :

$$v_{tt}(x,t) = \begin{cases} u_{tt}(x,t) & ; x > 0 \\ u_{tt}(-x,t) & ; x < 0 \end{cases} ; t > 0$$

No ha cambiado nada ya que t no tiene un cambio de signo.
Veamos que pasa con v_{xxxx} , recordemos que, por cadena, al derivar para $x < 0$ nos aparecerá un signo negativo por cada derivada, entonces:

$$v_x(x,t) = \begin{cases} u_x(x,t) & ; x > 0 \\ -u_x(-x,t) & ; x < 0 \end{cases} ; t > 0$$

$$\Rightarrow v_{xx}(x,t) = \begin{cases} u_{xx}(x,t) & ; x > 0 \\ u_{xx}(-x,t) & ; x < 0 \end{cases} ; t > 0$$

$$\Rightarrow v_{xxx}(x,t) = \begin{cases} u_{xxx}(x,t) & ; x > 0 \\ -u_{xxx}(-x,t) & ; x < 0 \end{cases} ; t > 0$$

$$\Rightarrow v_{xxxx}(x,t) = \begin{cases} u_{xxxx}(x,t) & ; x > 0 \\ u_{xxxx}(-x,t) & ; x < 0 \end{cases} ; t > 0$$

Entonces:

$$v_{tt} + \alpha^2 v_{xxxx} = \begin{cases} u_{tt}(x,t) + \alpha^2 u_{xxxx}(x,t) & ; x > 0 \\ u_{tt}(-x,t) + \alpha^2 u_{xxxx}(-x,t) & ; x < 0 \end{cases} ; t > 0$$

↳ cumple la ecuación...

(c.) Usamos la transformada de Fourier en la EDP asociada a la función $v(x,t)$ (para la variable x) y vemos que:

$$\widehat{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}(s,t) = \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2}(s,t) = \hat{v}_{tt}(s,t)$$

$$\widehat{\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}}(s,t) = (is)^4 \hat{v}(s,t) = s^4 \hat{v}(s,t)$$

Entonces:

$$v_{tt} + \alpha^2 v_{xxxx} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{v}_{tt} + \alpha^2 s^4 \hat{v} = 0}$$

↳ Si tomamos en cuenta la variable t , α y s (y en consecuencia $\alpha^2 s^4$) son constantes, entonces definiendo $\alpha^2 s^4 = \omega^2$ tendremos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} + \omega^2 \hat{v} = 0} \rightarrow \text{Una EDO para la variable } t !!!$$

Esta es la gran ventaja de usar transformada de Fourier en las EDP: convertimos una ecuación a derivadas parciales en una EDO. En este caso al resolver la EDO tenemos que:

$$\boxed{\hat{v}(s,t) = A(s) \cos(\alpha s^2 t) + B(s) \sin(\alpha s^2 t)}$$

→ Resolvimos la EDO para t , por lo tanto A y B son constantes que no dependen de t , pero podrían depender de s ...

Ahora usamos las condiciones iniciales para despejar las constantes, pero para poder usar condiciones iniciales que dependen de x , debemos transformarlas para que dependan de s (debemos pasarlas al mismo espacio

③

$$v(x,0) = \frac{1}{(1+x^2)} \Rightarrow \hat{v}(s,0) = \widehat{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \hat{v}(s,0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$$

$$\hat{v}(s,0) = A(s) \Rightarrow \boxed{A(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}}$$

$$v_t(s,0) = 0 \Rightarrow \hat{v}_t(s,0) = 0$$

$$\hat{v}_t(s,t) = -\alpha s^2 A(s) \sin(\alpha s^2 t) + \alpha s^2 B(s) \cos(\alpha s^2 t)$$

$$\Rightarrow \hat{v}_t(s,0) = \alpha s^2 B(s) = 0 \Rightarrow \boxed{B(s) = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{v}(s,t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(\alpha s^2 t)}$$

↳ Transformada de Fourier de $v(x,t)$ en la variable x ...

(d) En esta parte debería estar un poco más clara la ventaja de usar Transformada de Fourier para resolver una EDP, y es que ahora sólo necesitamos calcular la Antitransformada de $\hat{v}(s,t)$ para recuperar $v(x,t)$ y, en consecuencia, recuperar $u(x,t)$.

Calculamos la Antitransformada:

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(\alpha s^2 t) e^{isx} ds$$

Usamos que $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

$$\Rightarrow v(x,t) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|s|} \cos(s^2 t) \cos(sx) ds}_{\text{I}} + i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|s|} \cos(s^2 t) \sin(sx) ds}_{\text{II}} \right]$$

Notamos que I es la integral de una función par, por lo tanto podemos integrar entre 0 e ∞ y multiplicamos por 2. Por otro lado notamos que II es la integral de una función impar entre $-\infty$ e ∞ , por lo tanto $\text{II} = 0$, así:

$$\Rightarrow v(x,t) = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-s} \cos(s^2 t) \cos(sx) ds$$

$$\Rightarrow v(x,t) = \int_0^{\infty} e^{-s} \cos(s^2 t) \cos(sx) ds \quad / \quad \begin{array}{l} \text{Como } v(x,t) = u(x,t) \\ \text{para } x > 0, \text{ entonces} \\ \text{concluimos que} \end{array}$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} e^{-s} \cos(s^2 t) \cos(sx) ds$$

//

P3 Tenemos la EDP:

$$u_t + hu_x - u_{xx} = 0 ; x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Resolvamos haciendo uso de la transformada de Fourier en la variable x . Al aplicar transformada tendremos que:

$$\hat{u}_t + ish\hat{u} - (is)^2\hat{u} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}_t + ish\hat{u} + s^2\hat{u} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_t + (s^2 + ish)\hat{u} = 0} \rightarrow (*)$$

Tenemos la condición inicial $u(x,0) = f(x)$, que al aplicar transformada nos dice que $\hat{u}(s,0) = \hat{f}(s)$. La solución a la EDO (*) es:

$$\hat{u}(s,t) = A(s) e^{-(s^2 + ish)t}$$

$$\hat{u}(s,0) = \hat{f}(s) \Rightarrow A(s) = \hat{f}(s) \Rightarrow \boxed{\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s) e^{-(s^2 + ish)t}}$$

↳ Resolvimos la EDO...

Para recuperar $u(x,t)$ aplicamos la antitransformada:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{-(s^2 + ish)t} e^{isx} ds$$

Vemos que en nuestro resultado aparece f , no $\hat{f}$, entonces de alguna forma debemos hacer que aparezca. Recordando que, por definición:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-isz} dz$$

Ojo!, no se puede ni debe usar x , ya que confundirá las integrales...

Reemplazamos y tendremos que:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2+ish)t} e^{isx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-isz} dz \right) ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-isz} e^{-(s^2+ish)t} e^{isx} dz ds$$

Donde en el último paso las exponenciales entran como constantes, ya que no dependen de z . Ahora podemos hacer un cambio de variables para hacer que dentro de $f(\cdot)$ aparezca lo que queremos.

$$z = x - th + 2y\sqrt{t} \Rightarrow dz = 2\sqrt{t} dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x-th+2y\sqrt{t})+isx-(s^2+ish)t} f(x-th+2y\sqrt{t}) 2\sqrt{t} dy ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\sqrt{t}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(x-th+2y\sqrt{t})+isx-(s^2+ish)t} f(x-th+2y\sqrt{t}) dy ds$$

Trabajemos el exponente:

$$\begin{aligned} & -is(x-th+zy\sqrt{t}) + ixs - (s^2 + ish)t \\ &= -\cancel{isx} + \cancel{isth} - izys\sqrt{t} + \cancel{ixs} - s^2t - \cancel{isht} = -s^2t - izys\sqrt{t} \\ &= -(s\sqrt{t})^2 - izys\sqrt{t} \end{aligned}$$

Usamos el cambio de variables $\alpha = s\sqrt{t} \Rightarrow d\alpha = \sqrt{t}ds$

$$\Rightarrow -(s\sqrt{t})^2 - izys\sqrt{t} = -\alpha^2 - zy\alpha i \quad \Rightarrow ds = \frac{d\alpha}{\sqrt{t}}$$

Completamos cuadrado:

$$(\alpha i - b)^2 = -\alpha^2 - 2\alpha bi + b^2 = -\alpha^2 - zy\alpha i + b^2 \Rightarrow 2\alpha bi = zy\alpha i$$

$$(-b)$$

$$\Rightarrow b = y$$

$$\Rightarrow b^2 = y^2$$

$$\Rightarrow -\alpha^2 - zy\alpha i = -\alpha^2 - zy\alpha i + y^2 - y^2$$

$$\Rightarrow -\alpha^2 - zy\alpha i = (\alpha i - y)^2 - y^2$$

Entonces, reemplazando el cambio de variables tendremos que:

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{t}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha i - y)^2} e^{-y^2} f(x-th+zy\sqrt{t}) dy \frac{d\alpha}{\sqrt{t}}$$

Podemos intercambiar las integrales por Teorema de Fubini (α no depende de y , e y no depende de α), entonces, reordenando:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(x-th+zy\sqrt{t}) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha i - y)^2} d\alpha \right) dy$$

Usamos la integral conocida (vale $\sqrt{\pi}$ por enunciado), entonces:

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} f(x-th+2y\sqrt{t}) dy$$

↳ Solución de la EDP...