

*Series de Fourier: Para una función f continua por trozos en el intervalo $[-l, l]$ y con derivada en todo punto de $(-l, l)$ (y con derivada por la izquierda en $x = l$, y por la derecha en $x = -l$), se puede encontrar su serie de Fourier:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) ; x \in (-l, l)$$

Donde:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx ; b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

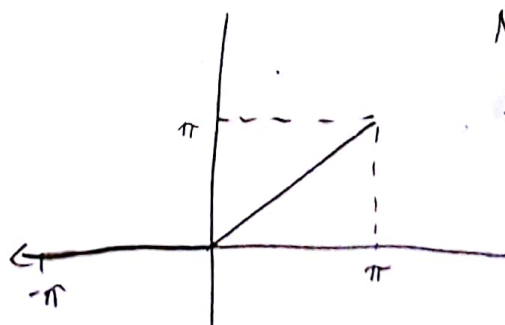
Para los extremos del intervalo $[l, l]$:

$$S_f(l) = S_f(-l) = \frac{1}{2} [f(l) + f(-l)]$$

Si hay algún punto de discontinuidad $x_0 \in [-l, l]$, $S_f(x_0)$ será calculado como el promedio de los límites laterales de $f(x)$ con $x \rightarrow x_0$. (Ver pág 186 Apuntes F. Álvarez).

P1 Tenemos la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < \pi \\ 0 & ; -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$



Notamos que $f(x)$ es continua...

(e) El trabajo que se tiene al querer calcular una serie de Fourier es encontrar las coeficientes a_n y b_n . Partamos por a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \quad \left/ \begin{array}{l} \text{En este caso } l = \pi \text{ y la función es nula} \\ \text{para } x < 0, \text{ entonces solo integramos entre} \\ 0 \text{ y } l = \pi \end{array} \right.$$

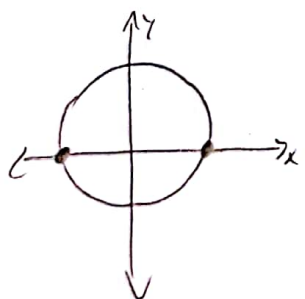
$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \pi^2 \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{\pi}{2}}$$

Ahora veamos cuánto valen a_n y b_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Integración por partes:} \\ \int u dv = uv - \int v du \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) \Rightarrow v = \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{n\pi} \left(x \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\pi}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx \right] = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{1}{\pi n} \cdot \frac{1}{n} \left(-\cos(nx) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{\pi n^2} \left(-\cos(n\pi) + \cos(0) \right)$$



Notemos que $\cos(n\pi)$ será 1 si n es par y -1 si n es impar, ¿qué otra expresión (más cómoda de trabajar) cumple lo mismo? EXACTO, USAMOS $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$\Rightarrow a_n = \frac{-1}{\pi n^2} ((-1)^{n+1} + 1) \Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi n^2} [(-1)^{n+2} - 1] \quad \left/ \begin{array}{l} (-1)^{n+2} = (-1)^n \cdot (-1)^2 = (-1)^n \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]}$$

Ahora nos falta b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \quad \left/ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(nx) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos(nx) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} [x \cos(nx)]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right]$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} [\pi \cos(n\pi) - 0 \cdot \cancel{\cos(0)}] + \frac{1}{n^2} [\sin(n\pi)]_0^{\pi} \right]$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{-1}{\pi n} \cdot \pi \cos(n\pi) = \frac{-1}{n} (-1)^n \Rightarrow \boxed{b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

Entonces reemplazamos en la definición de serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \quad / \quad l = \pi$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \right); \quad x \in (-\pi, \pi)$$

b) Notemos que, para $n = 2k+1$ impar:

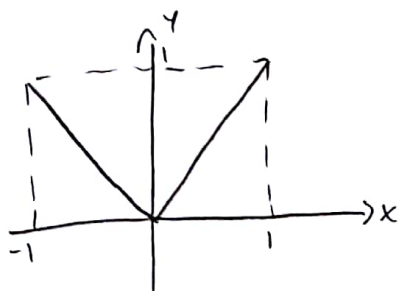
$$(i) (-1)^n = (-1)^{2k+1} = (-1)^{2k} \cdot (-1) = -1 \Rightarrow (-1)^n - 1 = -1 - 1 = -2$$

Ahora, reemplazamos $x=0$ para encontrar $f(0)$, tendremos que $\cos(0)=1$ y $\sin(0)=0$, Además sabemos que $f(0)=0$, entonces:

$$f(0)=0 \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{-2}{\pi n^2}$$

$$\Rightarrow -2 \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

P2 $f(x) = |x|$:



(a) Notemos que $f(x)$ es una función PAR. Conceptualmente Algo que si o si debemos saber es que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } f \text{ par} \Rightarrow b_n = 0 ; n > 0 \\ \text{(ii) } f \text{ impar} \Rightarrow a_n = 0 ; n \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow (*)$$

Nuestro caso es el primero, entonces, sólo calculamos los términos a_n .

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad \left/ \begin{array}{l} l=1 \text{ y, como } f(x) \text{ es PAR, tendremos} \\ \text{que: } \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 2 \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a_n = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \quad \left/ \begin{array}{l} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\cos(n\pi x) dx \Rightarrow v = \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow b_n = 2 \left[\frac{1}{n\pi} \left[x \sin(n\pi x) \right]_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \right]$$

$$\Rightarrow a_n = -2 \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[-\cos(n\pi x) \right]_0^1 = -\frac{2}{n^2 \pi^2} \left[-\cos(n\pi) + 1 \right]$$

$$\Rightarrow Q_n = -\frac{2}{n^2\pi^2} [-(-1)^n + 1] \Rightarrow \boxed{Q_n = \frac{2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]}$$

Calculamos a_0 :

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}$$

Entonces, reemplazando en la definición de serie de Fourier, tendremos que:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \cos(n\pi x) ; x \in (-1, 1)}$$

(b) Tal como dijimos en (*), si f es una función impar en el intervalo $[-l, l]$, entonces sólo sobreviven los términos b_n , que son los asociados a las senas de la serie de Fourier. Ahora, si tenemos una función definida en $[0, l]$, y queremos su expansión en serie de senas, usamos la extensión impar de $f(x)$, la cual podemos nombrar $\tilde{f}(x)$:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [0, l] \\ -f(-x) & ; x \in [-l, 0] \end{cases}$$

Esta nueva función $\tilde{f}(x)$ cumple que $\tilde{f}(x) = f(x)$ en el intervalo donde queremos trabajar, y además es impar por construcción:

$$(i) x \in [0, l] \rightarrow \tilde{f}(-x) = -f(x) = -\tilde{f}(x)$$

$$(ii) x \in [-l, 0] \rightarrow \tilde{f}(-x) = f(-x) = -\tilde{f}(x)$$

La gracia de este truco es que, si calculamos la serie de Fourier de $\tilde{f}(x)$ en $[-l, l]$, ésta será una serie de senos (impar), Además coincidirá con $f(x)$ para $[0, l]$, es decir, obtenemos la serie de senos de la función que queremos.

Como $\tilde{f}$ es impar tendremos que:

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \tilde{f}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 2 \int_0^1 \tilde{f}(x) \sin(n\pi x) dx \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Donde se usó } l=1 \text{ y} \\ \text{el hecho de que } \tilde{f}(x) \sin(n\pi x) \\ \text{es par (impar} \cdot \text{impar} = \text{par)}. \end{array} \right.$$

En $[0, 1]$ tendremos que $\tilde{f}(x) = f(x) = |x| = x$ en $[0, 1]$

$$\Rightarrow \tilde{b}_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \quad \left/ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(n\pi x) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \tilde{b}_n = 2 \left[-\frac{1}{n\pi} [x \cos(n\pi x)] \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx$$

$$\Rightarrow \tilde{b}_n = 2 \left[-\frac{1}{n\pi} [1 \cdot \cos(n\pi) - 0] + \frac{1}{n^2\pi^2} [\sin(n\pi x)]_0^1 \right]$$

$$\Rightarrow \tilde{b}_n = -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) = -\frac{2}{n\pi} (-1)^n \Rightarrow \boxed{\tilde{b}_n = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}}$$

Entonces, tendremos que:

$$\boxed{\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin(n\pi x) ; x \in (-1, 1)}$$

Entonces, como $\hat{f}(x) = f(x)$ en $[0, 1]$, tendremos que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin(n\pi x) ; x \in [0, 1]$$

(c) De forma análoga, para una función $f(x)$ con $x \in [0, l]$, podemos hacer su expansión a una función par $\hat{f}(x)$ definiendo:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in [0, l] \\ f(-x) & ; x \in [-l, 0] \end{cases}$$

De esta forma, calculamos la serie de Fourier de $\hat{f}(x)$ (que es par) y obtendremos una serie de cosenos. En nuestro caso $f(x)$ es par para el intervalo $[-l, l]$, entonces la función $\hat{f}(x) = f(x)$, $x \in [-l, l]$, de hecho, lo podemos notar al ver el resultado de la parte (e), donde sólo observamos cosenos, entonces:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} [(-1)^n + 1] \cos(n\pi x) ; x \in [0, 1]$$

P3 (a) Tenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \right] \rightarrow \text{Ecuación de onda unidimensional}$$

Para resolverla usaremos el método de separación de variables. Decimos que $u(x, t) = X(x)T(t)$, es decir, tenemos una parte dependiente de la posición, y una dependiente del tiempo multiplicadas (juntas, pero no revueltas).

¿Cuál es la ventaja? Veamos que pasa al derivar esta expresión:

$$(i) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (X(x) T(t)) = X(x) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = X T''$$

$$(ii) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (X(x) T(t)) = T(t) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = T X''$$

Entonces, reemplazando:

$$\Rightarrow X T'' - c^2 X'' T = 0$$

Buscamos soluciones NO triviales, es decir, $X(x) \neq 0$ y $T(t) \neq 0$ en todo nuestro dominio. entonces, multiplicamos a ambas lados por $\frac{1}{XT}$

$$\Rightarrow \frac{T''}{T} - c^2 \frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow \left[\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = -\alpha \right]$$

Este último paso es crucial; si las expresiones que dependen de las variables distintas se igualan para valores arbitrarios de esas variables (en este caso x y t), entonces DEBEN ser iguales a una constante, la cual llamamos $-\alpha$ (el signo $-$ es conveniente, ya veremos por qué). Dicho esto tendremos dos EDOs en vez de una EDP:

$$(i) \frac{T''}{T} = -\alpha \Rightarrow \left[\frac{d^2 T}{dt^2} + \alpha T = 0 \right]$$

$$(ii) \frac{c^2 X''}{X} = -\alpha \Rightarrow \left[\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\alpha}{c^2} X = 0 \right]$$

Antes de resolver cada una, veamos qué nos dicen las condiciones de borde:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\bar{X}T)(0, t) = 0 \Rightarrow \bar{X}'(0)T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{X}'(0) = 0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\bar{X}T)(\pi, t) = 0 \Rightarrow \bar{X}'(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{X}'(\pi) = 0}$$

Resolvamos la EDO (ii):

$$(ii) \frac{d^2 \bar{X}}{dx^2} + \frac{\alpha}{c^2} \bar{X} = 0 \quad / \quad \text{Debemos estudiar las soluciones en los casos:}$$

$$\alpha < 0 \quad ; \quad \alpha = 0 \quad ; \quad \alpha > 0$$

1. $\alpha < 0$: Tendremos la solución:

$$\bar{X}(x) = A \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} x\right) + B \exp\left(\frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} x\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X}'(x) = -\frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} A \exp\left(-\frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} x\right) + \frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} B \exp\left(\frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} x\right)$$

$$\bar{X}'(0) = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} A + \frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} B = 0 \Rightarrow A = B$$

$$\Rightarrow \bar{X}'(x) = A \frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} \left(\exp\left(\frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} x\right) - \exp\left(-\frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} x\right) \right)$$

$$\bar{X}'(\pi) = 0 \Rightarrow A \frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} \left(\exp\left(\frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} \pi\right) - \exp\left(-\frac{\sqrt{|\alpha|}}{c} \pi\right) \right) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{X}(x) = 0 \quad ; \quad \forall x}$$

NO nos sirve

2. $\alpha = 0$: Tendremos una recta:

$$\bar{X}(x) = Ax + B \Rightarrow \bar{X}'(x) = A$$

$$\bar{X}'(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{X}(x) = B} \rightarrow \text{Sirve}$$

3.- $\alpha > 0$: Tendremos la solución:

$$X(x) = A \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{c}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{c}x\right)$$

$$\Rightarrow X'(x) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{c}A \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{c}x\right) + \frac{\sqrt{\alpha}}{c}B \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{c}x\right)$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha}}{c}B = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow X'(x) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{c}A \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{c}x\right)$$

$$X'(\pi) = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{\alpha}}{c}A \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{c}\pi\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{c}\pi\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha}}{c}\pi &= n\pi \Rightarrow \sqrt{\alpha} = nc \\ &\Rightarrow \boxed{\alpha = n^2 c^2} \\ &\quad \hookrightarrow \text{Depende de } n!!! \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(x) = A_n \cos(nx)}$$

Notemos que $\alpha = 0$ es el caso $n = 0$, donde efectivamente $X(x)$ es una constante... En resumen:

$$\alpha_n = n^2 c^2 ; \quad \boxed{X_n(x) = A_n \cos(nx) ; \quad n = 0, 1, 2, \dots}$$

Ahora resolvemos la EDO (i):

$$(i) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \alpha T = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} T(t) &= C_n \cos(\sqrt{\alpha}t) + D_n \sin(\sqrt{\alpha}t) ; \alpha > 0 \\ T(t) &= C_0 + D_0 t ; \alpha = 0 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} T_0(t) &= C_0 + D_0 t ; n = 0 \\ T_n(t) &= C_n \cos(nct) + D_n \sin(nct) ; n > 0 \end{aligned}}$$

Entonces, encontramos una familia de soluciones $U_n(x,t)$ tales que:

$$U_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$$

La solución general está dada por la superposición de todas las soluciones, es decir:

$$U(x,t) = A_0 \cdot (C_0 + D_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) \cdot (C_n \cos(nct) + D_n \sin(nct))$$

Ahora imponemos las condiciones iniciales:

$$(i) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) (-C_n n c \sin(nct) + D_n n c \cos(nct))$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \Rightarrow D_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n D_n n c \cos(nx) = 0 \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Podemos definir} \\ D_n A_n = F_n \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(nx) \cdot n c = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(nx) n c = 0 \Rightarrow \boxed{F_n = 0 \quad \forall n} \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Ya que es una combinación lineal} \\ \text{de funciones linealmente} \\ \text{independientes} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{D_n = 0}$$

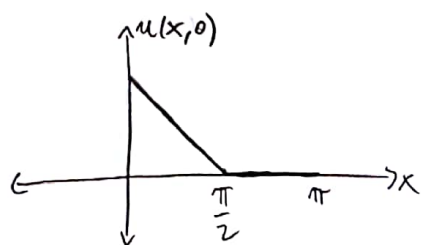
$$\Rightarrow u(x,t) = A_0 C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n \cos(nx) \cos(nct)$$

$$(ii) u(x,0) = A_0 C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n \cos(nx) \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Definimos} \\ A_n C_n = G_n \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,0) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos(nx)}$$

Teníamos la condición inicial:

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & ; 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & ; \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$



Entonces, juntando lo encontrado anteriormente con esto, vemos que C_n son los coeficientes de la expansión en cosenos de la condición inicial recién escrita.

Entonces:

$$2G_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x,0) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\frac{\pi}{2} - x) dx$$

$$\Rightarrow 2G_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} dx - \int_0^{\pi/2} x dx \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{4} \right] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \boxed{G_0 = \frac{\pi}{8}}$$

$$G_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x,0) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\frac{\pi}{2} - x) \cos(nx) dx$$

$$\Rightarrow G_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(nx) dx - \int_0^{\pi/2} x \cos(nx) dx \right] \quad \left/ \begin{array}{l} x=u \Rightarrow dx=du \\ dv=\cos(nx) dx \Rightarrow v=\frac{1}{n} \sin(nx) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow G_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} (\sin(nx)) \Big|_0^{\pi/2} - \left(\frac{1}{n} (x \sin(nx)) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{n} \sin(nx) dx \right) \right]$$

$$\Rightarrow G_n = \frac{2}{\pi} \left[\cancel{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)} - \cancel{\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right)} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin(nx) dx \right]$$

$$\Rightarrow G_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \left(-\cos(nx) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi n^2} \left(-\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{G_n = \frac{2}{\pi n^2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right)}$$

Entonces, tendremos finalmente que:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right) \cos(nx) \cos(nct)}$$

(b) Si Ahora $u(x,0) = \cos^2(x)$, debemos encontrar la expansión en serie de cosenos de $\cos^2(x)$. Para eso vemos que:

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\Rightarrow G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos(nx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\Rightarrow G_0 = \frac{1}{2} ; G_2 = \frac{1}{2} ; G_n = 0 ; n \neq 0 \text{ y } n \neq 2$$

Entonces tendremos que:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2ct) \cos(2x)}$$

P4] Usando el laplaciano en dos dimensiones, tenemos la ecuación:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0}$$

Usando separación de variables, diremos que $u(x,y) = X(x)Y(y)$, entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X Y''$$

$$\Rightarrow X''Y + X Y'' + X Y = 0 \quad / \quad \begin{array}{l} \text{Soluciones no triviales: } Y(x) \neq 0 \text{ e } Y(y) \neq 0 \\ \frac{1}{X Y} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + 1 = 0 \Rightarrow \left[\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - 1 = -\alpha \right]$$

Tendremos entonces las siguientes EDO's:

$$(i) \frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha X = 0 \quad / \quad \text{Problemas para: } \alpha < 0 ; \alpha = 0 ; \alpha > 0$$

1- $\alpha < 0$: En ese caso tendremos que:

$$X(x) = A \exp(\sqrt{|\alpha|}x) + B \exp(-\sqrt{|\alpha|}x)$$

Tenemos que $u(0,y) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$ y $u(1,y) = 0 \Rightarrow X(1) = 0$,
reemplazando:

$$X(0) = A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow X(x) = A(\exp(\sqrt{|\alpha|}x) - \exp(-\sqrt{|\alpha|}x))$$

$$X(1) = A(\exp(\sqrt{|\alpha|}) - \exp(-\sqrt{|\alpha|})) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \boxed{X(x) = 0} \rightarrow \text{No sirve...}$$

2- $\alpha = 0$: En este caso la EDO tiene como solución una recta:

$$X(x) = Ax + B \Rightarrow X(0) = B = 0 \Rightarrow X(x) = Ax$$

$$X(1) = A = 0 \Rightarrow \boxed{X(x) = 0} \rightarrow \text{No sirve!}$$

3. $\alpha > 0$: En este caso:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\alpha}x) + B \sin(\sqrt{\alpha}x)$$

$$X(0) = A = 0 \Rightarrow X(x) = B \sin(\sqrt{\alpha}x)$$

$$X(1) = 0 \Rightarrow B \sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = n\pi \Rightarrow \underline{\alpha = n^2\pi^2; n \geq 1}$$

$$\Rightarrow \underline{X_n(x) = B_n \sin(n\pi x)}$$

Ahora resolvemos la EDO asociada a $Y(y)$ sabiendo que $\alpha > 0$. Tendremos:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + (1 - \alpha)Y = 0 \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Notemos que} \\ 1 - \alpha = 1 - n^2\pi^2 < 0 \quad \forall n \geq 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \bar{Y}_n(y) = C_n \exp(\sqrt{1 - n^2\pi^2}y) + D_n \exp(-\sqrt{1 - n^2\pi^2}y) \quad / \quad 1 - n^2\pi^2 = \pi^2 n^2 - 1$$

$$\Rightarrow \bar{Y}_n(y) = C_n \exp(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}y) + D_n \exp(-\sqrt{n^2\pi^2 - 1}y)$$

De la condición de borde $u(x,0) = 0 \Rightarrow \bar{Y}(0) = 0$, entonces:

$$\bar{Y}_n(0) = 0 \Rightarrow C_n + D_n = 0 \Rightarrow D_n = -C_n$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{Y}_n(y) = C_n (e^{\sqrt{n^2\pi^2 - 1}y} - e^{-\sqrt{n^2\pi^2 - 1}y})}$$

Entonces, al superponer todas nuestras soluciones $u_n(x,y) = \bar{X}_n(x) \bar{Y}_n(y)$, tendremos que:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n C_n \sin(n\pi x) (e^{\sqrt{n^2\pi^2 - 1}y} - e^{-\sqrt{n^2\pi^2 - 1}y})$$

Ahora imponemos la condición $u(x,2) = x(x-1)$, entonces:

$$X(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n B_n \sin(n\pi x) (e^{2\sqrt{n^2\pi^2-1}} - e^{-2\sqrt{n^2\pi^2-1}}) / \begin{matrix} \text{Definimos} \\ A_n = G_n B_n \end{matrix}$$

Entonces, debemos calcular la serie de senos de $X(x-1)$ en el intervalo $[0, 1]$:

$$F_n = 2 \int_0^1 X(x-1) \sin(n\pi x) dx = 2 \left[\underbrace{\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 x \sin(n\pi x) dx}_{I_2} \right]$$

$$I_1 = \int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx \quad \begin{matrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \sin(n\pi x) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{n\pi} (x^2 \cos(n\pi x)) \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \quad \begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(n\pi x) dx \Rightarrow v = \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n\pi} (x \sin(n\pi x)) \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \right]$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3} (-\cos(n\pi) + \cos(0)) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{2}{n^3\pi^3}$$

$$I_2 = \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \quad \begin{matrix} x = u \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin(n\pi x) dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow I_2 = -\frac{1}{n\pi} (x \cos(n\pi x)) \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2} (\sin(n\pi x)) \Big|_0^1 \Rightarrow I_2 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Entonces tendremos que:

$$F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{2}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1] - \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \Rightarrow \boxed{F_n = \frac{2}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1]}$$

Sin embargo notamos que $F_n = A_n (e^{2\sqrt{n^2\pi^2-1}} - e^{-2\sqrt{n^2\pi^2-1}})$, entonces,

$$C_n B_n = A_n = \frac{F_n}{e^{2\sqrt{n^2\pi^2-1}} - e^{-2\sqrt{n^2\pi^2-1}}} = \frac{F_n}{2\sinh(2\sqrt{n^2\pi^2-1})}$$

$$\Rightarrow C_n B_n = \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^3\pi^3 \cdot 2\sinh(2\sqrt{n^2\pi^2-1})}$$

Entonces, reemplazando en $u(x,y)$ (donde también escribimos las exponenciales como un seno hiperbólico) tendremos que:

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^3\pi^3 \sinh(2\sqrt{n^2\pi^2-1})} \sin(n\pi x) \sinh(\sqrt{n^2\pi^2-1} y)}$$