

MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.**Profesor:** Juvenal Letelier.**Auxiliar:** Roberto Gajardo Pizarro.

Auxiliar 13,5: Ecuaciones en Derivadas Parciales.

20 de Junio de 2019

P1. La ecuación de Helmholtz, muy usada en electrodinámica y en física nuclear, es una ecuación en derivadas parciales dada por:

$$\Delta u + u = 0$$

Resuelva el caso en dos dimensiones ($u = u(x, y)$) para el dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ con las condiciones de borde $u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0$, $u(x, 2) = x(x - 1)$.

P2. Considere la ecuación:

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0; \quad x > 0; \quad t > 0$$

Suponga que $\int_0^\infty |u(x, t)| dx < \infty$ y considere las siguientes condiciones de borde e iniciales:

$$u_x(0, t) = 0; \quad t > 0$$

$$u_t(x, 0) = 0; \quad u(x, 0) = \frac{1}{(1+x^2)}$$

- Utilice que la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$ es $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$ para encontrar la transformada de Fourier de $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.
- Considere $v(x, t)$ la extensión par de la función $u(x, t)$ en la variable x . Verifique que esta extensión satisface la ecuación en derivadas parciales para $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.
- Deduzca que la transformada de Fourier de $v(x, t)$ en la variable x es $\hat{v}(s, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(\alpha s^2 t)$.
- Concluya que la solución $u(x, t)$ se puede escribir en forma integral como:

$$u(x, t) = \int_0^\infty e^{-s} \cos(sx) \cos(\alpha s^2 t) ds$$

P3. Para $h > 0$ constante, considere la ecuación:

$$u_t + hu_x - u_{xx} = 0; \quad x \in \mathbb{R}; \quad t > 0$$

Esta ecuación tiene la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que la solución a esta ecuación en derivadas parciales tiene la forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - th + 2y\sqrt{t}) e^{-y^2} dy$$

Pd: Use sin demostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(ix-a)^2} dx = \sqrt{\pi}$$