

P1 Usemas la definición de TRANSFORMADA de Fourier de una función $f(x)$:

$$\left[\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx \right] \rightarrow \text{T. de Fourier de la función } f(x).$$

Para poder hacer la transformada necesitamos que $f(x)$ sea integrable (es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$). En este caso $f(x) = e^{-x^2}$. Queda como ejercicio demostrar (usando la parte anterior del curso) el hecho de que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} < \infty \Rightarrow \text{integrable}$$

Entonces la transformada existe. Calculemos:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ixs} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 + ixs)} dx$$

El truco para este tipo de integrales es completar el cuadrado en el exponente y llegar a una integral cuyo integrando sea $e^{-(x^2+b)^2}$, ya que la integral de $f(x) = e^{-x^2}$ y $g(x) = e^{-(x+b)^2}$ entre $-\infty$ e ∞ es $\sqrt{\pi}$, sea cual sea el valor finito de b (siempre y cuando b no dependa de x). En el desarrollo del ejercicio se demostrará lo que se acaba de decir. Completando cuadrado:

$$(x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2 = x^2 + ixs + b^2 \Rightarrow 2bx = ixs \Rightarrow b = \frac{is}{2} \Rightarrow b^2 = -\frac{s^2}{4}$$

Entonces:

$$x^2 + ixs = x^2 + ixs - \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{4} \Rightarrow x^2 + ixs = \left(x + \frac{is}{2}\right)^2 + \frac{s^2}{4}$$

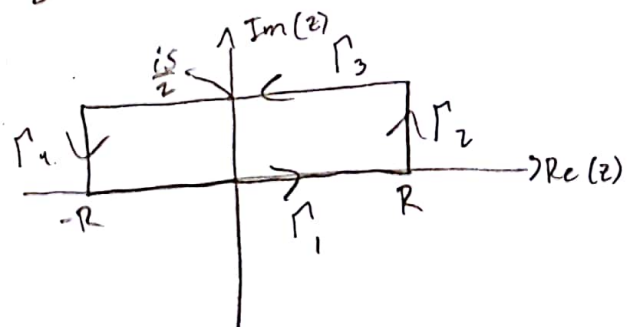
Reemplazando en $\hat{f}(s)$:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\left(x + \frac{is}{2}\right)^2 + \frac{s^2}{4}\right]} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x + \frac{is}{2})^2} \cdot e^{-\frac{s^2}{4}} dx$$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x + \frac{is}{2})^2} dx}_I$$

Habíamos dicho que $I = \sqrt{\pi}$,
ya que $b = \frac{is}{2}$ no depende
de x . Demostremoslo...

Usemos la función compleja $f(z) = e^{-z^2}$, la cual es holomorfa por comparación.
Si integramos en un rectángulo notemos que cierto lado debe estar en $\frac{is}{2}$ constante para que aparezca la integral que buscamos.



Como $f(z)$ es holomorfa:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 ; \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

$$\Gamma_1: z = x ; x \in [-R, R] \Rightarrow dz = dx \text{ y } f(z) = e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$$

$$\Gamma_2: z = R + iy ; y \in [0, \frac{s}{2}] \Rightarrow dz = i dy \text{ y } f(z) = e^{-(R+iy)^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_0^{s/2} e^{-(R+iy)^2} i dy$$

$$\Gamma_3: z = x + \frac{is}{2} ; x \in [R, R] \Rightarrow dz = dx \text{ y } f(z) = e^{-(x + \frac{is}{2})^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_3} f(z) dz = \int_R^{-R} e^{-(x + \frac{is}{2})^2} dx \quad \left(\text{Recordar el sentido del camino y los límites de la integral} \right) !!!$$

$$\Gamma_4: z = -R + iy ; y \in [0, \frac{s}{2}] \Rightarrow dz = idy \text{ y } f(z) = e^{-(-R + iy)^2}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_4} f(z) dz = \int_{\frac{s}{2}}^0 e^{-(-R + iy)^2} idy$$

Entonces, con el límite $R \rightarrow \infty$:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{s}{2}} e^{-(R + iy)^2} idy + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-(x + \frac{is}{2})^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{s}{2}}^0 e^{-(-R + iy)^2} idy = 0$$

La primera integral vale $\sqrt{\pi}$ (dato), mientras que la segunda y cuarta integral tienden a cero con $R \rightarrow \infty$ (*). Entonces, dando vuelta los límites de la tercera integral:

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x + \frac{is}{2})^2} dx}_I = 0 \Rightarrow \boxed{I = \sqrt{\pi}}$$

Entonces, reemplazando en $\hat{f}(s)$:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{4}} \cdot I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{4}} \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{s^2}{4}}}$$

↳ T. de Fourier de $-x^2$
la función $f(x) = e^{-x^2}$ //

Pd.: Queda como ejercicio demostrar la afirmación (*)

P2 (a) Tenemos la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

Problemas que es integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^0 |f(x)| dx + \int_0^{\infty} |f(x)| dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -1 \cdot e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1 < \infty$$

$\Rightarrow$ Integrable!

Entonces, usando la definición de Transformada de Fourier:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ixs} dx + \int_0^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx \right]$$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-ixs} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(1+is)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{-1}{(1+is)} \left[e^{-(1+is)x} \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{-1}{is+1} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(is+1)x} - e^{-(is+1) \cdot 0} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{is+1}} //$$

(b) Se tiene la función:

$$g(x) = \begin{cases} K & ; -a \leq x \leq a \\ 0 & ; -x < -a \text{ ó } x > a \end{cases} ; K \in \mathbb{R}$$

Mostremos que es integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx = \int_{-\infty}^{-a} |g(x)| dx + \int_{-a}^a |g(x)| dx + \int_a^{\infty} |g(x)| dx = \int_{-a}^a K dx = K(a - (-a)) = 2Ka < \infty$$

$\Rightarrow$ Integrable!

Entonces, usando la definición de Transformada de Fourier:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ixs} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a K e^{-ixs} dx = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ixs} dx$$

$$\Rightarrow \hat{g}(s) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{-1}{is} (e^{-ixs}) \Big|_{-a}^a = \frac{-K}{\sqrt{2\pi} si} [e^{-ias} - e^{-i(-a)s}]$$

$$\Rightarrow \hat{g}(s) = \frac{2K}{\sqrt{2\pi} s} \cdot \frac{1}{2i} [e^{ias} - e^{-ias}] \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Usamos que} \\ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{array} \right. \quad y \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \hat{g}(s) = \frac{2K}{\sqrt{2\pi} s} \sin(as) \Rightarrow \boxed{\hat{g}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} K \frac{\sin(as)}{s}} //$$

P3 Tenemos la función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Veamos que es integrable:

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \left. \vphantom{\int_0^{\infty}} \right\} \rightarrow \text{Queda propuesto demostrar este resultado...}$$

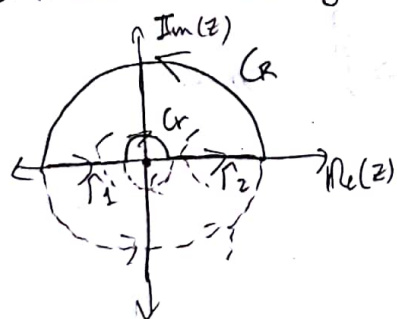
Como es integrable, su transformada existe. Calculemos:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x) e^{-ixs}}{x} dx \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Debemos usar la expansión del seno en} \\ \text{exponenciales complejas (MUY IMPORTANTE!)} \\ \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \Rightarrow \sin(x) e^{-ixs} = \frac{1}{2i} (e^{ix(1-s)} - e^{-ix(1+s)}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix(1+s)}}{x} dx}_{I_2} \right]$$

Trabajemos ambas integrales por separado:

I_1 Usamos la función compleja $g(z) = \frac{e^{iz(1-s)}}{z}$, la cual tiene un polo simple en $z_0 = 0$. Para evitarlo usamos el camino de integración que se muestra debajo:



Notemos inmediatamente que al integrar en la semicircunferencia usaremos la parametrización $z = R e^{i\theta}$ y, al reemplazar en $g(z)$, notemos que:

$$e^{iz(1-s)} = e^{i R e^{i\theta} (1-s)} = e^{i R (1-s) (\cos(\theta) + i \sin(\theta))}$$

$$\Rightarrow e^{iz(1-s)} = e^{i R (1-s) \cos(\theta)} \cdot e^{-R (1-s) \sin(\theta)}$$

Queremos que la integral asociada a la semicircunferencia sea cero, y la única forma de asegurarlo es que, para el camino de arriba, $1-s > 0$.

En el caso $1-s < 0$ debemos usar el camino de abajo para asegurar la convergencia, entonces el valor de la integral real dependerá del signo de $1-s$:

(i) $1-s > 0$: Usamos el camino de arriba. Como la integral asociada a la semicircunferencia se anula, tendremos que:

$$\oint g(z) dz = \int_{\Gamma_1} g(z) dz + \int_{\Gamma_r} g(z) dz + \int_{\Gamma_2} g(z) dz$$

Para Γ_1 y Γ_2 usamos $z = x$ y $dz = dx$, donde los límites para Γ_1 son $x \in [-R, -r]$ y para Γ_2 son $x \in [r, R]$ (nuestra idea es hacer $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ para obtener la integral que se busca). Para Γ_r usamos $z = re^{i\theta}$ y $dz = ir e^{i\theta} d\theta$. En este caso $\theta \in [0, \pi]$, pero se recorre de π a 0 . Tendremos entonces que:

$$\oint g(z) dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx + \underbrace{\int_{\pi}^0 \frac{e^{ir e^{i\theta}(1-s)}}{r e^{i\theta}} ir e^{i\theta} d\theta}_{(u)} + \int_r^R \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx$$

Notemos que, para $r \rightarrow 0$, la integral (u) converge:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (u) = i \int_{\pi}^0 e^0 d\theta = i \int_{\pi}^0 d\theta = -\pi i$$

$$\Rightarrow \oint g(z) dz = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx - \pi i + \int_0^{\infty} \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx = 0$$

$$\Rightarrow \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx = \pi i ; 1-s > 0 \right]$$

$g(z)$ es holomorfa en el interior de nuestro camino de integración...

(ii) $1-s < 0$: En este caso usamos el camino de abajo. La integral asociada a la circunferencia mayor es cero, entonces, para este camino:

$$\oint g(z) dz = \int_R^r \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx + \int_0^{-\pi} \frac{e^{ire^{i\theta}(1-s)}}{\cancel{x}e^{i\theta}} d\theta + \int_{-r}^{-R} \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx = 0$$

Aplicando $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ tendremos que:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx - \pi i + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx = 0$$

$$\Rightarrow - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx - \pi i = 0 \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx = -\pi i ; 1-s < 0}$$

Notemos que con ambas caminos (y condiciones) llegamos a distintos resultados. Podemos escribir:

$$1-s > 0 \Rightarrow s < 1 ; 1-s < 0 \Rightarrow s > 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(1-s)}}{x} dx = \begin{cases} \pi i & ; s < 1 \\ -\pi i & ; s > 1 \end{cases}}$$

I_2 Podemos reescribir el exponente de la exponencial en I_2 , entonces:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(-1-s)}}{x} dx$$

El desarrollo es literalmente análogo y arrojará las mismas resultados, sólo que ahora depende del signo de $(-1-s)$, NO de $1-s$. Entonces, tendremos que:

$$-1-s > 0 \Rightarrow s < -1 ; -1-s < 0 \Rightarrow s > -1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix(1+s)}}{x} dx = \begin{cases} \pi i & ; s < -1 \\ -\pi i & ; s > -1 \end{cases}$$

Ahora vemos los casos:

(i) $s < -1$: En este caso $I_1 = \pi i$ e $I_2 = \pi i$, entonces, reemplazando en $\hat{f}(s)$:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} [\pi i - \pi i] = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{f}(s) = 0 ; s < -1}$$

(ii) $s \in (-1, 1)$: En este caso $s > -1$ y $s < 1$, entonces $I_1 = \pi i$ e $I_2 = -\pi i$, reemplazando:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} [\pi i + \pi i] \Rightarrow \boxed{\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} ; s \in (-1, 1)}$$

(iii) $s > 1$: En este caso $I_1 = -\pi i$ e $I_2 = -\pi i$, entonces:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} [-\pi i + \pi i] = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{f}(s) = 0 ; s > 1}$$

Entonces, en resumen:

$$\boxed{\hat{f}(s) = \begin{cases} 0 & ; |s| > 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & ; |s| < 1 \end{cases}} \rightarrow \text{T. de Fourier de la Función } f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

P4 (a) Tenemos las funciones:

$$\hat{\phi}_n(s) = \begin{cases} 0 & ; s < -s_0 \text{ ó } s > s_0 \\ (2s_0)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi s}{s_0}} & ; -s_0 \leq s \leq s_0 \end{cases}$$

Debemos calcular su transformada inversa, es decir:

$$\left[\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_n(s) e^{isx} ds \right] \rightarrow \text{Transformada inversa de Fourier}$$

Entonces:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{-s_0} \hat{\phi}_n(s) e^{isx} ds + \int_{-s_0}^{s_0} \hat{\phi}_n(s) e^{isx} ds + \int_{s_0}^{\infty} \hat{\phi}_n(s) e^{isx} ds \right]$$

$$\Rightarrow \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-s_0}^{s_0} \frac{1}{\sqrt{2s_0}} e^{-\frac{i\pi s}{s_0}} e^{isx} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi s_0}} \int_{-s_0}^{s_0} e^{s(ix - \frac{i\pi}{s_0})} ds$$

$$\Rightarrow \phi_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s_0}} \cdot \frac{1}{i(x - \frac{n\pi}{s_0})} \cdot \left[e^{i s_0(x - \frac{n\pi}{s_0})} - e^{-i s_0(x - \frac{n\pi}{s_0})} \right]$$

$$\Rightarrow \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi s_0}} \cdot \frac{s_0}{s_0 x - n\pi} \cdot \frac{1}{2i} \left[e^{i(s_0 x - n\pi)} - e^{-i(s_0 x - n\pi)} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_n(x) = \sqrt{\frac{s_0}{\pi}} \cdot \frac{\sin(s_0 x - n\pi)}{s_0 x - n\pi}} \rightarrow \text{Transformada inversa de las funciones } \hat{\phi}_n(s)$$

(b) Si f y g son funciones complejas, es decir:

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Entonces el producto interno está dado por:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x) dx \quad / \quad \text{En este caso usamos } \hat{\phi}_n(s) \text{ y } \hat{\phi}_m(s)$$

$$\langle \hat{\phi}_n, \hat{\phi}_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_n(s) \hat{\phi}_m^*(s) ds$$

$$\Rightarrow \langle \hat{\phi}_n, \hat{\phi}_m \rangle = \int_{-s_0}^{s_0} \frac{1}{\sqrt{2s_0}} e^{-\frac{i\pi s}{s_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2s_0}} e^{\frac{i\pi s}{s_0}} ds = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} e^{s(\frac{i\pi}{s_0} - \frac{i\pi}{s_0})} ds$$

$$\Rightarrow \langle \hat{\phi}_n, \hat{\phi}_m \rangle = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} e^{\frac{i\pi s}{s_0} (m-n)} ds \rightarrow \text{Ahora nos ponemos en casos.}$$

(i) $m=n$: En este caso tendremos $e^{\frac{i\pi s}{s_0} \cdot 0} = 1$, entonces:

$$\langle \hat{\phi}_n, \hat{\phi}_m \rangle = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} ds = \frac{1}{2s_0} \cdot (s_0 - (-s_0)) \Rightarrow \boxed{\langle \hat{\phi}_n, \hat{\phi}_m \rangle = 1 ; n=m}$$

(ii) $m \neq n$: Debemos resolver la integral asociada a la exponencial:

$$\langle \hat{\phi}_n, \hat{\phi}_m \rangle = \frac{1}{2s_0} \cdot \frac{1}{\frac{i\pi}{s_0} (m-n)} \left[e^{\frac{i\pi s}{s_0} (m-n)} \right]_{-s_0}^{s_0} = \frac{-i}{2\pi(m-n)} \left[e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)} \right]$$

$$\Rightarrow \langle \hat{\phi}_n, \hat{\phi}_m \rangle = \frac{1}{\pi(m-n)} \cdot \frac{1}{2i} \left[e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)} \right] \Rightarrow \boxed{\langle \hat{\phi}_n, \hat{\phi}_m \rangle = \frac{\sin(\pi(m-n))}{\pi(m-n)} ; m \neq n}$$

Como m y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $m-n \in \mathbb{Z} \forall m, n \in \mathbb{N}$, y si nombramos $k = m-n$, como $k \in \mathbb{Z}$ sabemos que $\frac{\sin(\pi k)}{\pi k} = 0 ; k \neq 0$ (que es el caso $m=n$), entonces:

$$\boxed{\langle \hat{\phi}_n, \hat{\phi}_m \rangle = 0 ; m \neq n} //$$

(11)