MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Juvenal Letelier.
Auxiliar: Roberto Gajardo Pizarro.

Auxiliar 7: Números complejos.

29 de Abril de 2019

P1. a) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ e $Im(z) > 0$. Demuestre que $Im\left(z + \frac{1}{z}\right) > 0$.

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = |z+1|$. Demuestre que $Re(z) = -\frac{1}{2}$

c) Sea $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que $|z+i| = |z-i| \iff z \in \mathbb{R}$.

P2. Encuentre las raices de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 = 1$

b) $(az+b)^3 = c$

c) $z^2 + 2z + 2 = 0$

P3. a) Si z_1 y z_2 son las soluciones de la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$. Demuestre que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo θ que no sea múltiplo de π, se cumple que:

$$\frac{(\cot(\theta) + z_1 - 1)^n - (\cot(\theta) + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} = \sin(n\theta)(\operatorname{cosec}(\theta))^n$$

b) Pruebe que, $\forall n \in \mathbb{N},\ z = (1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}$ y calcule z para cualquier n.

P4. Muestre que el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que

$$\left|\frac{z-2}{z+1}\right| = 2$$

forman una circunferencia en el plano complejo. Determine su centro y su radio.

P5. Discuta sobre las siguientes transformaciones del plano complejo Z al plano complejo W:

a) $w(z) = z^3$

b) $w(z) = \frac{1}{z}$