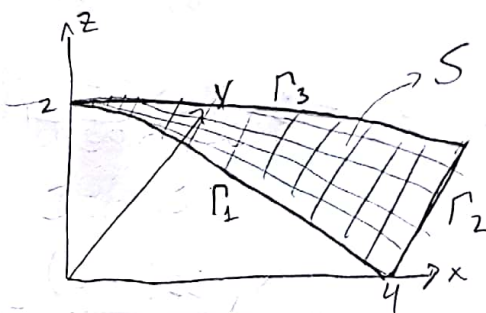


P1 Nosotras que la superficie S puede obtener dibujando la parábola $z^2 = 4 - x$ en el plano xz y proyectando a lo largo del eje y . Luego se dibuja la parábola $x = y^2$ y se corta esa parte. Debemos comprobar:

$$\underbrace{\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Teorema de Stokes}}$$



Nosotras que ∂S (borde de S) puede dividirse en 3 partes (curvas regulares):

$$\Gamma_1 = \{z^2 = 4 - x, 0 \leq z \leq 2, y = 0\}$$

$$\Gamma_2 = \{x = 4, 0 \leq y \leq 2, z = 0\}$$

$$\Gamma_3 = \{z^2 = 4 - x, 0 \leq z \leq 2, x = y^2\}$$

Se deben parametrizar estas curvas en sentido positivo según la normal que se use en la integral de la izquierda del teorema de Stokes. Por lo tanto, primero parametrizamos S , calculamos $\hat{n}$ según la restricción dada, y luego calculamos la integral.

Como tenemos relaciones entre nuestras coordenadas, podemos decir que $x = 4 - z^2$, entonces:

$$\vec{\sigma}(y, z) = (4 - z^2)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Entonces, calculemos el vector normal. Para vectores tangentes:

$$(i) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = 0\hat{i} + 1\hat{j} + 0\hat{k} \Rightarrow \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} = \hat{j}$$

$$(ii) \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} = (-2z)\hat{i} + 0\hat{j} + 1\hat{k} \Rightarrow \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} = -2z\hat{i} + \hat{k}$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z}}{\left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} \right\|} = \frac{\hat{j} \times (-2z\hat{i} + \hat{k})}{\|0\|} = \frac{-2z(-\hat{k}) + \hat{i}}{\|0\|} = \frac{2z\hat{k} + \hat{i}}{\|2z\hat{k} + \hat{i}\|}$$

$$\|2z\hat{k} + \hat{i}\| = \sqrt{4z^2 + 1} \Rightarrow \hat{n} = \frac{2z\hat{k} + \hat{i}}{\sqrt{4z^2 + 1}}$$

Notemos que la condición nos pide usar la normal tal que $\hat{n} \cdot \hat{i} > 0$, en este caso $\hat{n} \cdot \hat{i} = \frac{1}{\sqrt{4z^2 + 1}} > 0$, entonces usamos $\hat{n}$ encontrado (si hubiese resultado $\hat{n} \cdot \hat{i} < 0$, bastaba con cambiar el signo de $\hat{n}$).

Entonces, tenemos $\hat{n}$, y $ds = \left\| \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial z} \right\| \cdot dy dz$, nos falta calcular

$\nabla \times \vec{F}$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \hat{z}$$
$$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = -\hat{x} - \hat{y} - \hat{z}$$

Tenemos $\hat{n}$, ds , y $\nabla \times \vec{F}$, sólo nos faltaría ver los límites de y y z en la integral.

$$0 \leq z \leq 2; \quad x = 4 - z^2; \quad x \geq y^2; \quad y \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq z \leq 2; \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4 - z^2}$$

Entonces:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, ds = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \frac{-(1, 1, 1) \cdot (1, 0, 2z)}{\sqrt{4z^2+1}} \cdot \sqrt{4z^2+1} \, dy \, dz$$

$$= - \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} (1+2z) \, dy \, dz = - \int_0^2 (1+2z) \sqrt{4-z^2} \, dz$$

Usando el cambio de variable típico para esas raíces ($z = 2 \sin(\theta)$), se tiene que:

$$z = 0 \Rightarrow \theta = 0; \quad z = 2 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}; \quad 4 - z^2 = 4(1 - \sin^2(\theta)) = 4 \cos^2(\theta)$$

$$dz = 2 \cos(\theta) \, d\theta$$

$$\Rightarrow \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, ds = - \int_0^{\pi/2} (1+4 \sin(\theta)) \cdot \sqrt{4 \cos^2(\theta)} \cdot 2 \cos(\theta) \, d\theta \quad \left/ \begin{array}{l} \sqrt{4 \cos^2(\theta)} = 2 \cos(\theta) \\ \text{YA que } \cos(\theta) \geq 0 \text{ en } [0, \pi/2] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, ds = - \int_0^{\pi/2} 4(1+4 \sin(\theta)) \cos^2(\theta) \, d\theta = -4 \int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta) \, d\theta - 16 \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos^2(\theta) \, d\theta$$

Y, se llega a:

$$\left| \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, ds = -\pi - \frac{16}{3} \right|$$

Ahora necesitamos calcular la integral sobre el borde:

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Notemos que la normal apunta hacia "Arriba", lo cual nos da la orientación de las curvas. Entonces, notemos que Γ_1 debe ser recorrido desde $(0,0,2)$ a $(4,0,0)$. Entonces:

$$\Gamma_1: \vec{r}_1(z) = (4-z^2)\hat{i} + z\hat{k}; \quad z \in [0,2]$$

$$\Rightarrow d\vec{r}_1 = (-2z)\hat{i} + \hat{k} dz$$

$$\Rightarrow (\vec{F} \cdot d\vec{r}_1) \Big|_{\substack{y=0 \\ x=4-z^2}} = (0, z, 4-z^2) \cdot (-2z, 0, 1) dz = (4-z^2) dz$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_2^0 (4-z^2) dz = 4 \cdot (2-0) - \left(\frac{z^3}{3} \right) \Big|_2^0 = -8 + \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$$

Donde los límites de la integral van acorde a la orientación de la curva.

Ahora, para Γ_2 , tenemos una recta que va de $(4,0,0)$ a $(4,2,0)$, entonces:

$$\Gamma_2: \vec{r}_2(y) = 4\hat{i} + y\hat{j}; \quad y \in [0,2]$$

$$\Rightarrow d\vec{r}_2 = \hat{j} dy$$

$$\Rightarrow (\vec{F} \cdot d\vec{r}_2) \Big|_{\substack{x=4 \\ z=0}} = (y, 0, 4) \cdot (0, 1, 0) dy = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = 0$$

Finalmente para Γ_3 tenemos que:

$$z^2 = 4 - x, \quad y \quad x = y^2$$

$$\Rightarrow z^2 = 4 - y^2 \Rightarrow z^2 + y^2 = 4$$

Podemos hacer una parametrización en "polares", con $y = 2\cos(\theta)$ y $z = 2\sin(\theta)$. Con esto, como $x = 4 - z^2$, tendremos $x = 4 - 4\sin^2(\theta) = 4\cos^2(\theta)$. Para ver los límites de θ , vemos que se parte en $(4, 2, 0)$ y se termina en $(0, 0, 2)$. Notemos que esto se logra para $\theta \in [0, \pi/2]$, entonces:

$$\Gamma_3: \vec{r}_3(\theta) = 4\cos^2(\theta)\hat{i} + 2\cos(\theta)\hat{j} + 2\sin(\theta)\hat{k}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = (-8\cos(\theta)\sin(\theta)\hat{i} - 2\sin(\theta)\hat{j} + 2\cos(\theta)\hat{k})d\theta$$

$$\Rightarrow (\vec{F} \cdot d\vec{r}_3) \Big|_0 = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), 4\cos^2(\theta)) \cdot (-8\cos(\theta)\sin(\theta), -2\sin(\theta), 2\cos(\theta))d\theta$$

$$= (-16\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 4\sin^2(\theta) + 8\cos^3(\theta))d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3 = \int_0^{\pi/2} (-16\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 4\sin^2(\theta) + 8\cos^3(\theta))d\theta \rightarrow \text{Se dejó como ejercicio esta integral para practicar}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3 = -\pi$$

Entonces:

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3 \Rightarrow \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\pi - \frac{16}{3}$$

Con lo cual se comprueba Stokes...

P2 (a) Aplicamos directamente la fórmula del rotor en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y - 3z + e^x \sin(z) & x^2 & e^x \cos(z) - 3x \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = (0 - 0)\hat{x} - (e^x \cos(z) - 3 - e^x \cos(z) + 3)\hat{y} + (2x - 3x^2)\hat{z}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = (2x - 3x^2)\hat{z}$$

(b) Apliquemos teorema de Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Como $\nabla \times \vec{F}$ resulta ser una expresión mucho más simple que $\vec{F}$, es mejor usarlo. Tomando en cuenta el cilindro con su tapa superior, es una superficie regular a trozos y cuyo borde ∂S es efectivamente Γ . Además, $\vec{F}$ es C^∞ (comparación de funciones) entonces podemos aplicar Stokes en esta superficie. Finalmente, notemos que la orientación de Γ (dada en la parametrización) nos pide usar $\hat{n}$ como normal exterior al cilindro. Sea $S = S_1 \cup S_2$, donde S_1 será el manto del cilindro, y S_2 será la tapa superior, como el cilindro no tiene dimensiones especificadas, busquemoslas:

(i) El radio debe cumplir en todas las puntos que $x^2 + y^2 = r^2$, en particular, tomando x e y de la parametrización $\vec{r}(t)$, se tiene:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \cos^2(t) + \sin^2(t) = r^2 \Rightarrow \boxed{r=1}$$

Para la altura no hay ninguna especificación, salvo que h debe ser mayor a 1 (para que se cumpla la forma propuesta). Usamos entonces como altura $z=h$ arbitrario.

Ahora, notemos que $\nabla \times \vec{F}$ sólo tiene componente en $\hat{z}$, y como la normal $\hat{n}_1 = \hat{z}$ (normal del manito) entonces $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}_1 = 0$, por lo tanto:

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}_1 dS_1 = 0$$

Para la tapa, notemos que $\hat{n}_2 = \hat{k}$, entonces $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}_2 = 2x - 3x^2$.

Ahora:

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = h\}$$

Lo cual podemos parametrizar en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{r}(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) \hat{x} + \rho \sin(\theta) \hat{y} + h \hat{z}; \quad \rho \in [0, 1]; \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Y, recordando que $dS = \rho d\rho d\theta$ en cilíndricas (para $z = \text{cte}$), entonces:

$$\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}_2 dS_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho \cos(\theta) - 3\rho^2 \cos^2(\theta)) \rho d\theta d\rho \rightarrow \text{No aparece } h!!!$$

La integral asociada a $\cos(\theta)$ es cero, así:

$$\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}_2 dS_2 = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 3\rho^3 \cos^2(\theta) d\rho d\theta = -\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n}_2 dS_2 = -\frac{3\pi}{4}$$

Entonces, por teorema de Stokes, tenemos que:

$$\boxed{\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{3\pi}{4}}$$

P3 (a) Usando directamente el rotor en coordenadas ortogonales:

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ V_u h_u & V_v h_v & V_w h_w \end{vmatrix}$$

En cilíndricas, $\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)$, entonces:

$$h_\rho = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right\| = \left\| (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \right\| = 1$$

$$h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \left\| (-\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), 0) \right\| = \rho$$

$$h_z = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\| = \left\| (0, 0, 1) \right\| = 1$$

Entonces:

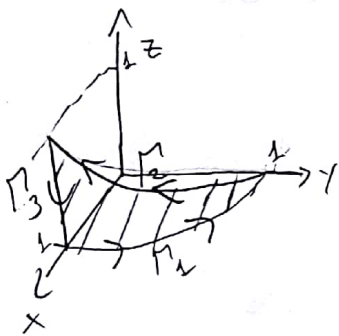
$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_\rho & \rho V_\theta & V_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2\theta + \sqrt{2} \rho^2 & \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\theta} & \theta^2 + \ln(1+z^2) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{\rho} \cdot [(2\theta - 0)\hat{\rho} - (0 - 0)\hat{\theta} + (0 - 2)\hat{z}]$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{2\theta}{\rho} \hat{\rho} - \frac{2}{\rho} \hat{z}$$

(b) Tenemos la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq x, y \geq 0\}$

Notemos que es la superficie de un cilindro de radio 1 con z limitado entre $z=0$ y el plano $z=x$, además de cumplir $y \geq 0$.



Notemos que calcular la integral de línea por definición puede resultar complicado por la complejidad del campo, además de aparecer integrales imposibles de calcular (literalmente).

Por ejemplo, al querer calcular la integral sobre Γ_1 , tendríamos:

$$\Gamma_1: \vec{r}_1(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) ; \theta \in [0, \pi/2]$$

$$\Rightarrow d\vec{r}_1 = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) d\theta = \hat{\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow (\vec{F} \cdot d\vec{r}_1)_{z=0} = e^{\theta^2} \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} d\theta = e^{\theta^2} d\theta \Rightarrow \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_0^{\pi/2} e^{\theta^2} d\theta$$

Aparece una integral que no puede calcularse analíticamente.

Es conveniente entonces usar el Teorema de Stokes. Primero, por cómo se orienta la curva, y como es una porción del marco de un cilindro, naturalmente $\hat{n} = \hat{\rho}$. Ahora, podemos parametrizar la superficie S en coordenadas cilíndricas con $\rho=1$, $\theta \in [0, \pi/2]$ y $0 \leq z \leq x$, es decir, $0 \leq z \leq \cos(\theta)$.

En coordenadas cilíndricas, para $\rho=cte$ se tiene $ds = \rho d\theta dz$, en este caso, $ds = d\theta dz$. Ahora, como $\hat{n} = \hat{\rho}$ y calculamos $\nabla \times \vec{V}$ en la parte (A):

$$\left. \left((\nabla \times \vec{V}) \cdot \hat{n} \right) \right|_{\rho=1} = (2\theta \hat{\rho} - 2\hat{z}) \cdot \hat{\rho} = 2\theta$$

Entonces, por teorema de Stokes:

$$\int_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot \hat{n} ds = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(\theta)} 2\theta dz d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \theta \cos(\theta) d\theta$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} u = \theta &\Rightarrow du = d\theta \\ dv = \cos(\theta) d\theta &\Rightarrow v = \sin(\theta) \end{aligned} \Rightarrow 2 \int_0^{\pi/2} \theta \cos(\theta) d\theta = 2 \cdot \left[\theta \sin(\theta) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) d\theta \right]$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] = \pi - 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\partial S} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \pi - 2}$$

P.4. Debemos verificar que:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} \, dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Partamos por la izquierda. Calculando el rotor:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = (1, 1, 1)$$

Notemos que, al ser un paraboloide, $z = x^2 + y^2 = \rho^2$, entonces, podemos parametrizar S en cilíndricas:

$$S: \vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2)$$

Calculando vectores tangentes:

$$(i) \vec{t}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos \theta, \sin \theta, 2\rho)$$

$$(ii) \vec{t}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0)$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{\vec{t}_\rho \times \vec{t}_\theta}{\|\vec{t}_\rho \times \vec{t}_\theta\|} = \frac{(-2\rho^2 \cos \theta, -2\rho^2 \sin \theta, \rho)}{\| -2\rho^2 \hat{\rho} + \rho \hat{k} \|}$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{-2\rho^2 \hat{\rho} + \rho \hat{k}}{\sqrt{4\rho^4 + \rho^2}}$$

Notamos que es la normal interior

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{2\rho^2 \hat{\rho} - \rho \hat{k}}{\sqrt{4\rho^4 + \rho^2}}$$

↳ Esta si es la normal exterior...

Y, recordando que $ds = \|t_s \times t_\theta\| \cdot d\theta ds$, tenemos que:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} = (1, 1, 1) \cdot (2s^2 \cos(\theta), 2s^2 \sin(\theta), -s) = 2s^2(\cos(\theta) + \sin(\theta)) - s$$

$$\Rightarrow \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2s^2(\cos(\theta) + \sin(\theta)) - s) ds d\theta$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{2\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} ds = -\pi}$$

Ahora, calculamos la integral de línea, para eso notemos que es una circunferencia de radio 1 en $z=1$. En ese caso:

$$\Gamma: \vec{r}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 1); \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) d\theta$$

Entonces:

$$(\vec{F}(\theta) \cdot d\vec{r})|_{z=1} = (1, \cos(\theta), \sin(\theta)) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) d\theta = (-\sin(\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{2\pi}^0 (-\sin(\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta = \int_{2\pi}^0 \cos^2(\theta) d\theta \Rightarrow \boxed{\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\pi}$$

Notar los límites acorde a la orientación...

Por lo tanto, se verifica el Teorema de Stokes...