MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Juvenal Letelier.
Auxiliar: Roberto Gajardo Pizarro.

Auxiliar 2: Integral de trabajo y Teorema de Green (Parte 2).

27 de Marzo de 2019

P1. Para el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ calcule la integral de línea sobre la curva C orientada en sentido antihorario que corresponde al borde del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, y $(1, 0)$.

P2.
a) Bosqueje la superficie definida por $z^2 + x^2 = 4 + y^2$, $y \geq 0$. Note que para y fijo, la ecuación anterior representa una circunferencia.

b) Bosqueje la curva C obtenida al intersectar la superficie anterior con el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

c) Calcule la circulación

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

para el campo (en coordenadas cilíndricas)

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = (\rho \sin(\theta) + z)\hat{\rho} + \frac{z}{\rho} \sin(\theta)\hat{\theta} + (z^3 - \rho \cos(\theta))\hat{z}$$

P3. Considere la curva Γ sobre el plano xy descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares:

$$\rho(\theta) = a(1 - \cos(\theta)) \;\; ; \;\; a > 0, \;\; \theta \in [0, 2\pi]$$

a) Encuentre una parametrización para Γ y bosqueje esta curva.

b) Calcule el trabajo efectuado por el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \left(2xy^2 \cos(x^2y^2) + \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, 2x^2y \cos(x^2y^2) + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\right)$$

al dar una vuelta completa a lo largo de la curva Γ en el sentido antihorario.

P4. Considere el campo vectorial:

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z\right)$$

Y las siguientes curvas ya paramentrizadas:

$$C_1 : \; \vec{\Gamma}_1(t) = (a \cos(t), a \sin(t), 0) \; ; \; t \in [\pi, 2\pi]$$

$$C_2 : \; \vec{\Gamma}_2(t) = (1 - t)(a, 0, 0) + t(a, 0, a) \; ; \; t \in [0, 1]$$

$$C_3 : \; \vec{\Gamma}_3(t) = (a \cos(t), a \sin(t), a) \; ; \; t \in [0, \pi]$$

Bosqueje $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ y calcule la integral de línea del campo $\vec{F}$ sobre el camino C.