MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Juvenal Letelier.
Auxiliar: Roberto Gajardo Pizarro.

Auxiliar 1: Elementos de cálculo vectorial.

18 de Marzo de 2019

P1. Dibuje las curvas de nivel de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$
b) $g(x,y) = x^2 - y^2$ (silla de montar).
c) $h(x,y) = x^2 + y - 2$

P2. Considere el potencial gravitacional:

$$V(\vec{r}) = -\frac{GM}{\|\vec{r}\|} = -\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad , \quad \vec{r} \neq \vec{0}$$

Verifique usando directamente la definición de ∇ que $\Delta V = 0$ en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$

P3. Sean los campos vectoriales $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y los campos escalares $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, todos suficientemente diferenciales. Demuestre las siguientes identidades vectoriales:

a) $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ (el gradiente de un campo escalar es irrotacional).
b) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ (el rotor de un campo vectorial es solenoidal).
c) $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$
d) $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$

P4. Se definen los siguientes operadores diferenciales en coordenadas ortogonales generalizadas:

a) Gradiente:

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

b) Divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial (F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial (F_w h_u h_v)}{\partial w}\right]$$

c) Rotor:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

Donde:

$$h_u = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\| \ , \ h_v = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\| \ , \ h_w = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right\| \ , \ \hat{u} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \ , \ \hat{v} = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \ , \ \hat{w} = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$$

La interacción entre los nucleones al interior de un núcleo atómico está caracterizado por el potencial de Yukawa, el cual se describe como:

$$V(\vec{r}) = -\frac{g^2 e^{-km\|\vec{r}\|}}{\|\vec{r}\|}$$

Donde g, k y m son constantes que caracterizan la interacción, y $\|\vec{r}\|$ es la distancia entre nucleones. Determine el campo vectorial $\vec{F}$ asociado a este potencial y la divergencia de este campo (es decir, $\nabla \cdot \vec{F}$).

P5. Consideremos el sistema de coordenadas dado por

$$\vec{r}(x,\rho,\theta) = (x, \rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ y $\rho \geq 0$.

a) Determinar el triedro de vectores unitarios $\hat{x}$, $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$. ¿Son ortogonales? Calcule $\hat{\theta} \times \hat{x}$ y $\hat{\theta} \times \hat{\rho}$.

b) Encuentre expresiones para el gradiente, divergencia, laplaciano y rotor en este sistema de coordenadas.

c) Dada una función no negativa y diferenciable $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, bosqueje la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = f(x)^2$. Verifique que una parametrización de esta superficie es $\vec{r}_1(x,\theta) = x\hat{x} + f(x)\hat{\rho}$.