

*Pauta Auxiliar Pre-Examen "Cálculo Avanzado y Aplicaciones"

P1 (c) Usaremos teorema de la divergencia. Recordamos que si V es un volumen cerrado, ∂V es la superficie de este volumen, $\hat{n}$ es la normal exterior a la superficie, entonces:

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dV$$

Para poder aplicar este teorema necesitamos que $\vec{F}$ sea al menos clase C^1 en el volumen V . En este caso $\vec{F}$ es una composición de funciones C^1 (polinomios) y C^∞ (funciones trigonométricas y exponenciales) entonces es C^1 en todo el espacio ($\mathbb{R}^3$). Calculamos directamente la divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = y^2 + x^2 + 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = x^2 + y^2 \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{F} = \rho^2}$$

Donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es el radio en coordenadas cilíndricas. Entonces:

$$\underbrace{\iint_C \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA}_{\text{Flujo}} = \iiint_V \rho^2 \, dV$$

El tema acá es darse cuenta de que queremos el flujo a través del mantor del cilindro, y la superficie C es la del cilindro completo, contando las TAPAS. Entonces reescribimos la expresión:

$$\Rightarrow \underbrace{\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA}_{\text{Flujo a través del manto}} + \underbrace{\iint_{T_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dA + \iint_{T_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dA}_{\text{Flujo a través de las tapas}} = \iiint_V \rho^2 dv$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \rho^2 dv - \iint_{T_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dA - \iint_{T_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Tomamos T_1 como la tapa superior y T_2 como la tapa inferior. La normal exterior para T_1 y T_2 será $\hat{z}$ y $-\hat{z}$, respectivamente, entonces $\vec{F} \cdot \hat{n} = \pm x^2 = \pm \rho^2 \cos^2(\theta)$; $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Con esto podemos ver que:

$$\iint_{T_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = - \iint_{T_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Por lo tanto, la contribución de la tapa superior se cancela con la de la tapa inferior, entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \rho^2 dv$$

Entonces, para calcular el flujo a través del manto del cilindro, debemos calcular la integral de volumen de ρ^2 . En este caso $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $z \in [-1, 1]$. El diferencial de volumen de un cilindro es $dv = \rho d\rho d\theta dz$, entonces:

$$\iiint_V \rho^2 dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \rho^3 dz d\theta d\rho = 4\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho = 4\pi \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \iiint_V \rho^2 dv = \pi$$

Entonces, tendremos que:

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \pi}$$

→ Flujo a través del marco del cilindro...

b) Tenemos como superficie el casquete semiesférico superior centrado en el origen con radio a . Stokes nos dice que, si $\vec{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 , entonces:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} ds = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Es decir, el flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de la superficie es igual a la integral de línea (en el borde de la superficie S , es decir, ∂S) donde la curva ∂S está orientada positivamente según la normal exterior $\hat{n}$. Como nos piden verificar Stokes, debemos calcular ambas integrales.

Primero por calcular $\nabla \times \vec{F}$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & xy & -xz \end{vmatrix} = (0)\hat{x} - (-z)\hat{y} + (y - 2y)\hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{F} = z\hat{y} - y\hat{z}}$$

Ahora, como es una esfera, podemos usar como normal exterior el vector $\hat{r}$. Entonces:

$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} = (z\hat{y} - y\hat{z}) \cdot \hat{r} = z(\hat{y} \cdot \hat{r}) - y(\hat{z} \cdot \hat{r})$$

Recordamos que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, donde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ y $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces:

$$\hat{y} \cdot \hat{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ; \hat{z} \cdot \hat{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow z(\hat{y} \cdot \hat{r}) - y(\hat{z} \cdot \hat{r}) = 0 \Rightarrow (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow \left[\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dA = 0 \right]$$

Entonces, debemos verificar que la otra integral también nos da cero. El borde de la superficie S es una circunferencia de radio a en $z=0$ (plano xy). Para saber qué orientación tomar (horario o antihorario) debemos revisar la normal exterior. Una componente de la normal siempre está en $\hat{z}$, y la otra es paralela a nuestra circunferencia. Por la componente de $\hat{z}$ concluimos que debemos recorrer la circunferencia ∂S en sentido antihorario.



Ahora, para esta parametrización usamos x, y y z en esféricas. Originalmente $x = r \cos(\phi) \sin(\theta)$, $y = r \sin(\phi) \sin(\theta)$ y $z = r \cos(\theta)$. En ese caso $r=a$ y el caso del plano xy corresponde a $\theta = \pi/2$, entonces $x = a \cos(\phi)$, $y = a \sin(\phi)$ y $z = 0$, donde $\phi \in [0, 2\pi]$ y se recorre en ese mismo orden (sentido). Al reemplazar esta parametrización en $\vec{F}$ tendremos que:

$$\vec{F} = a^2 \sin^2(\phi) \hat{x} + a^2 \sin(\phi) \cos(\phi) \hat{y}$$

Por otro lado:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = a\cos(\phi)\hat{x} + a\sin(\phi)\hat{y}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = (-a\sin(\phi)\hat{x} + a\cos(\phi)\hat{y})d\phi$$

Entonces:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (-a^3\sin^3(\phi) + a^3\sin(\phi)\cos^2(\phi))d\phi$$

$$\Rightarrow \int_{2\pi}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -a^3 \int_0^{2\pi} \sin^3(\phi) d\phi + a^3 \int_0^{2\pi} \sin(\phi) \cos^2(\phi) d\phi$$

Integramos por partes la primera integral:

$$\int_0^{2\pi} \sin^3(\phi) d\phi \quad \left/ \begin{array}{l} u = \sin^2(\phi) \Rightarrow du = 2\sin(\phi)\cos(\phi)d\phi \\ dv = \sin(\phi)d\phi \Rightarrow v = -\cos(\phi) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^3(\phi) d\phi = \left(-\cancel{\cos(\phi)\sin^2(\phi)} \right) \Big|_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} \sin(\phi)\cos^2(\phi) d\phi$$

Entonces:

$$\Rightarrow \int_{2\pi}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -a^3 \left[2 \int_0^{2\pi} \sin(\phi)\cos^2(\phi) d\phi - \int_0^{2\pi} \cancel{\sin(\phi)\cos^2(\phi) d\phi} \right]$$

$$\Rightarrow \int_{2\pi}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -a^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\phi)\cos^2(\phi) d\phi}_{=0 \text{ (Integral cíclica)}} \Rightarrow \boxed{\int_{2\pi}^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Entonces, se
verifica Stokes...

P2 (a) Usaremos teorema de los residuos. Sea D un dominio simplemente conexo, si $f: D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica excepto en un número finito de puntos, y C es una curva contenida en D , simple, cerrada, regular a trozos, orientada positivamente. Si existen z_k puntos en $\text{Int}(C)$ tales que f no es analítica, entonces:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_k)$$

Donde $\text{Res}(f, z_k)$ es el residuo de la función f en la singularidad z_k . Si esta singularidad es un pole de orden n , entonces:

$$\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_k)^n f(z)]$$

Notemos que pasa en nuestro caso con la función $f(z) = \frac{e^z - 1}{z \sin(z)}$.

Veamos que el denominador se anula para algunos valores de z .

$$z \cdot \sin(z) = 0 \Rightarrow z = 0 \quad \text{ó} \quad \sin(z) = 0 \Rightarrow z = 0 \quad \text{ó} \quad z = m\pi; m \in \mathbb{Z}$$

Notemos que C es la circunferencia de radio $\frac{3\pi}{2}$, entonces sólo nos interesan los polos tales que $|z| < \frac{3\pi}{2}$, entonces $m = -1, 0, 1$, y así:

$$\boxed{z_0 = 0; z_1 = -\pi; z_2 = \pi} \rightarrow \text{Polos de } f(z)$$

Notemos que $z_0 = 0$ anula el denominador por z y por $\sin(z)$, lo cual sugiere que es de orden 2, sin embargo, recordemos que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

Es decir, $z=0$ (por parte de z) es una singularidad evitable, no un polo, y para las singularidades evitables el residuo es nulo. Así, $z_0=0$, $z_1=-\pi$ y $z_2=\pi$ son polos simples de $f(z)$ en $\text{Int}(C)$. Así, para calcular la integral, solo basta con calcular los residuos.

(i) $z_0=0$:

$$\text{Res}(f, z_0=0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{\sin(z)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{\cos(z)} = 1$$

(ii) $z_1=-\pi$:

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow -\pi} \frac{(z+\pi)(e^z-1)}{z \sin(z)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow -\pi} \left(\frac{e^z-1 + e^z(z+\pi)}{\sin(z) + z \cos(z)} \right) = \frac{e^{-\pi}-1}{\pi}$$

(iii) $z_2=\pi$:

$$\text{Res}(f, z_2) = \lim_{z \rightarrow \pi} \frac{(z-\pi)(e^z-1)}{z \sin(z)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow \pi} \left(\frac{e^z-1 + e^z(z-\pi)}{\sin(z) + z \cos(z)} \right) = \frac{1-e^\pi}{\pi}$$

Entonces:

$$\oint_C \frac{e^z-1}{z \sin(z)} dz = 2\pi i \left(1 + \frac{e^{-\pi}-1}{\pi} + \frac{1-e^\pi}{\pi} \right) = 2\pi i (\pi + e^{-\pi} - 1 + 1 - e^\pi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C \frac{e^z-1}{z \sin(z)} dz = 2\pi i (\pi + e^{-\pi} - e^\pi)} //$$

(b) La Fórmula integral de Cauchy dice que si Γ es una curva cerrada, f es una función holomorfa y $z_0 \in \text{Int}(\Gamma)$, entonces:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

Entonces, lo que debemos hacer es llevar nuestro integrando a una función de la forma $\frac{f(z)}{z-z_0}$. Lo mejor es usar fracciones parciales:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{Az-2A+Bz-B}{(z-1)(z-2)}$$

$$\Rightarrow (A+B)z - (2A+B) = 1 \Rightarrow A+B=0 \quad \text{y} \quad 2A+B=-1$$

$$\Rightarrow B = -A \quad ; \quad B = -1-2A$$

$$\Rightarrow -A = -1-2A \Rightarrow \boxed{A = -1 \Rightarrow B = 1}$$

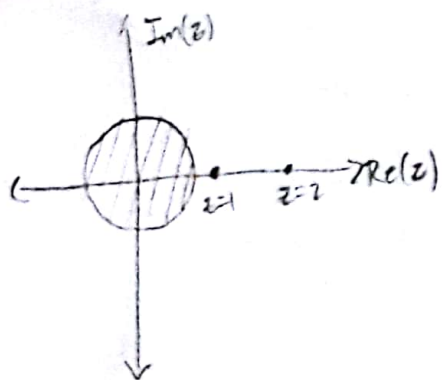
$$\Rightarrow \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} = -\frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} + \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2}$$

Entonces:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = -\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz + \oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz$$

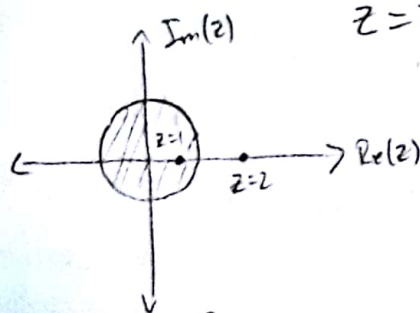
La función $f(z) = \sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$ es holomorfa en todo el espacio, entonces tenemos las integrales de la forma que el teorema nos pide. Para calcular en todo radio R debemos ponerlas en casos:

(i) $R < 1$: En este caso Γ es una circunferencia de radio $R < 1$, y en $\text{Int}(\Gamma)$ no hay ningún polo encerrado, entonces el integrando de ambas integrales es holomorfo en $\text{Int}(\Gamma)$, Así:



$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = 0 ; R < 1$$

(ii) $1 < R < 2$: En este caso se encierra $z=1$. Como no se encierra $z=2$ entonces la integral asociada al denominador $z-2$ es nula, ya que su integrando es holomorfo en $\text{Int}(\Gamma)$ para el caso $1 < R < 2$. La otra integral, por teorema de Cauchy, será:



$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz = 2\pi i (\sin(\pi) + \cos(\pi)) = -2\pi i$$

Entonces:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i ; 1 < R < 2$$

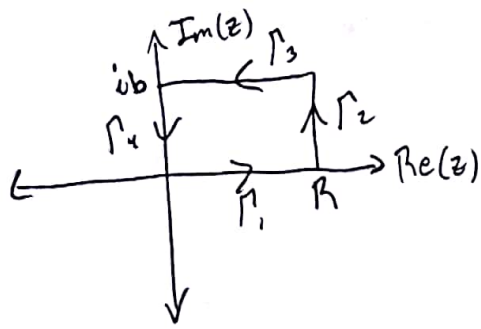
(iii) $R > 2$: En este caso se encierran ambos polos. Ya calculamos la integral asociada a $z=1$, para $z=2$:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz = 2\pi i (\sin(4\pi) + \cos(4\pi)) = 2\pi i$$

Entonces:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = 4\pi i ; R > 2$$

(c) Usamos la función $f(z) = e^{-z^2}$ tal como se nos aconseja, y la integramos en el rectángulo de la Figura. Debemos parametrizar cada camino por separado y calcular.



$$\oint_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_4} e^{-z^2} dz$$

(i) Γ_1 En este caso $z_1 = x \Rightarrow dz_1 = dx$ y $e^{-z^2} = e^{-x^2}$, $x \in [0, R]$, entonces:

$$\Rightarrow \left[\int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz_1 = \int_0^R e^{-x^2} dx \right]$$

(ii) Γ_2 En este caso $z_2 = R + iy \Rightarrow dz_2 = i dy$, $y \in [0, b]$, Además $e^{-z^2} = e^{-(R+iy)^2}$, entonces:

$$\Rightarrow \left[\int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz_2 = i \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dy \right]$$

(iii) Γ_3 En este caso $z_3 = x + ib \Rightarrow dz_3 = dx$ y $x \in [0, R]$, pero se recorre de R a 0 . Tendremos $e^{-z^2} = e^{-(x+ib)^2}$, entonces:

$$\Rightarrow \left[\int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz_3 = \int_R^0 e^{-(x+ib)^2} dx \right]$$

(iv) Γ_4 En este caso $z_4 = iy \Rightarrow dz_4 = i dy$ e $y \in [0, b]$, pero se recorre de b a 0 . Tendremos $e^{-z^2} = e^{-(iy)^2} = e^{y^2}$, entonces:

$$\Rightarrow \left[\int_{\Gamma_4} e^{-z^2} dz_4 = i \int_b^0 e^{y^2} dy \right]$$

Ahora, como $f(z) = e^{-z^2}$ es holomorfa en todo el plano complejo, su integral en un camino cerrado dará cero, es decir:

$$\oint_{\Gamma} e^{-z^2} dz = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_4} e^{-z^2} dz = 0$$

$$\Rightarrow \left[\int_0^R e^{-x^2} dx + i \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dy - \int_0^R e^{-(x+ib)^2} dx - i \int_0^b e^{y^2} dy \right] = 0 \rightarrow (*)$$

Donde las signos negativos salieron de dar vuelta las límites de integración. Lo que está en (*) es cierto $\forall R > 0$, pero nosotros queremos $R \rightarrow \infty$. Para la última integral este límite no afecta en nada, mientras que para la primera y tercera integral $R \rightarrow \infty$ sólo cambia el límite de integración. La parte matraquera aparece para la 2° integral, donde R está en el integrando. NO podemos decir directamente que el integrando se anulará y por lo tanto toda la integral vale cero, sino que hay que demostrarlo acotando:

$$\left| i \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dy \right| = \left| \int_0^b e^{-(R^2 + 2iRy - y^2)} dy \right| = \left| e^{-R^2} \int_0^b e^{2iRy} e^{y^2} dy \right| \leq e^{-R^2} \int_0^b |e^{2iRy}| e^{y^2} dy$$

$$\Rightarrow \left| i \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dy \right| \leq e^{-R^2} \int_0^b e^{y^2} dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dy = 0 \quad \text{---} \rightarrow \text{Lo cual elimina la segunda integral...}$$

Entonces tendremos que:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_0^{\infty} e^{-(x+ib)^2} dx - i \int_0^b e^{-y^2} dy = 0$$

Ahora ponemos nuestras ojos en la 2ª integral, ya que:

$$e^{-(x+ib)^2} = e^{-(x^2 + 2ixb - b^2)} = e^{-x^2} e^{b^2} e^{-2xbi} = e^{-x^2+b^2} (\cos(2xb) - i \sin(2xb))$$

Entonces:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - e^{b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2xb) dx + i e^{b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(2xb) dx - i \int_0^b e^{-y^2} dy = 0$$

Entonces, tomando la parte real:

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - e^{b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2xb) dx = 0 \Rightarrow e^{-b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2xb) dx$$

Y, tomando la parte imaginaria:

$$\Rightarrow e^{b^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(2xb) dx - \int_0^b e^{-y^2} dy = 0 \Rightarrow e^{-b^2} \int_0^b e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(2xb) dx$$

Donde se cambió y por x en la variable de integración.

P3 Usamos separación de variables. Tenemos que $u(x,t) = X(x)T(t)$, entonces.

$$u_{tt} = X T'' ; u_{xx} = X'' T$$

Entonces:

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} = 0 \Rightarrow X T'' - \alpha X'' T = 0 \quad / \cdot \frac{1}{X T} \quad \begin{array}{l} \text{Soluciones no} \\ \text{triviales:} \\ X \neq 0 ; T \neq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{T''}{T} - \alpha \frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow \left[\frac{T''}{T} = \alpha \frac{X''}{X} = -\lambda \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{T'' + \lambda T = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{X'' + \frac{\lambda}{\alpha} X = 0}$$

Resolvamos la EDO para $X(x)$ (ya que tenemos las condiciones de borde directas). Debemos ver cómo se comporta la solución para cada signo de λ :

(i) $\lambda < 0$: En ese caso tenemos:

$$X'' - \frac{|\lambda|}{\alpha} X = 0 \Rightarrow X(x) = A e^{-\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x} + B e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x}$$

Tenemos la condición $u(0,t) = 0$, lo cual se traduce a $X(0) = 0$, entonces:

$$X(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow X(x) = A(e^{-\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x} - e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x})$$

La condición $u(1,t) = 0$ se traduce en $X(1) = 0$, entonces:

$$X(1) = 0 \Rightarrow A(e^{-\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}} - e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}}) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \text{o} \quad e^{-\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}} - e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}} = 0$$

Si $A = 0$ entonces $X(x) = 0 \quad \forall x$ y no nos sirve, mientras que la otra condición sólo se cumple si $\lambda = 0$, sin embargo buscamos en el caso $\lambda < 0$, es decir, sería una contradicción, por lo tanto descartamos $\lambda < 0$ (13)

(ii) $\lambda = 0$: En ese caso tenemos la EDO:

$$\bar{X}'' = 0 \Rightarrow \bar{X}(x) = Ax + B$$

Imponemos las condiciones de borde:

$$\bar{X}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\bar{X}(1) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \bar{X}(x) = 0 \Rightarrow \text{No sirve}$$

$\lambda = 0$

(iii) $\lambda > 0$: En este caso tenemos la EDO:

$$\bar{X}'' + \frac{\lambda}{\alpha} \bar{X} = 0 \Rightarrow \bar{X}(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} x\right)$$

Imponemos condiciones de borde:

$$\bar{X}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\bar{X}(1) = 0 \Rightarrow B \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} = \pi n \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \alpha \pi^2 n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{X}_n(x) = B_n \sin(\pi n x)}$$

Ahora resolvemos para $T(t)$:

$$T'' + \lambda T = 0 \Rightarrow T(t) = C \cos(\sqrt{\lambda} t) + D \sin(\sqrt{\lambda} t)$$

$$\Rightarrow T_n(t) = C_n \cos(\sqrt{\lambda} \pi n t) + D_n \sin(\sqrt{\lambda} \pi n t)$$

Usamos $u(x, 0) = 0$, lo cual se traduce en $T(0) = 0$, así:

$$T_n(0) = 0 \Rightarrow C_n = 0 \Rightarrow \boxed{T_n(t) = D_n \sin(\sqrt{\lambda} \pi n t)}$$

Entonces:

$$U_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) \Rightarrow U_n(x,t) = B_n D_n \sin(\pi n x) \sin(\sqrt{\alpha} \pi n t)$$

Definiendo $M_n = B_n D_n$ y usando superposición, tendremos que $U(x,t)$ es:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin(\pi n x) \sin(\sqrt{\alpha} \pi n t)$$

Ahora usamos la condición $U_t(x,0) = f(x)$, es decir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha} \pi n M_n \sin(\pi n x)$$

Ahora vemos que pasa según cuánto vale $f(x)$:

(i) $f(x) = \sin(\pi x)$: En este caso:

$$\sin(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha} \pi n M_n \sin(\pi n x) \Rightarrow M_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha} \pi} & ; n=1 \\ 0 & ; n \neq 1 \end{cases}$$

Entonces, tendremos que:

$$U(x,t) = \frac{1}{\pi \sqrt{\alpha}} \sin(\pi x) \sin(\sqrt{\alpha} \pi t)$$

(ii) $f(x) = \cos(\pi x)$: En este caso:

$$\cos(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha} \pi n M_n \sin(\pi n x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin(\pi n x) ; H_n = \sqrt{\alpha} \pi n M_n$$

Debemos calcular la serie de senos de $\cos(\pi x)$ en $(0,1)$. La serie de senos para $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) ; \quad H_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

En este caso $f(x) = \cos(\pi x)$ y $l = 1$, entonces:

$$H_n = 2 \int_0^1 \cos(\pi x) \sin(n\pi x) dx \quad \text{Por ortogonalidad sabemos que } H_1 = 0. \text{ Veamos para } n > 1$$

$$H_n = 2 \underbrace{\int_0^1 \cos(\pi x) \sin(n\pi x) dx}_{I_n} \quad \begin{array}{l} u = \sin(n\pi x) \Rightarrow du = n\pi \cos(n\pi x) dx \\ dv = \cos(\pi x) dx \Rightarrow v = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \\ H_n = 2 I_n \end{array}$$

$$\Rightarrow H_n = 2 \left[\cancel{\frac{1}{\pi} (\sin(\pi x) \sin(n\pi x))} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{n\pi}{\pi} \sin(\pi x) \cos(n\pi x) dx \right] \quad \begin{array}{l} u = \cos(n\pi x) \\ \Rightarrow du = -n\pi \sin(n\pi x) dx \\ dv = \sin(\pi x) dx \\ \Rightarrow v = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \end{array}$$

$$\Rightarrow H_n = 2 \left[-n \cdot \left(-\frac{1}{\pi} (\cos(\pi x) \cos(n\pi x)) \right) \Big|_0^1 - n \int_0^1 \cos(\pi x) \sin(n\pi x) dx \right]$$

$$\Rightarrow H_n = -2n \left(-\frac{1}{\pi} (-\cos(\pi) - 1) - n I_n \right) = -\frac{2n}{\pi} ((-1)^n + 1) + 2n^2 I_n$$

Como $H_n = 2 I_n$:

$$\Rightarrow 2 I_n = -\frac{2n}{\pi} ((-1)^{n+1} - 1) + 2n^2 I_n \Rightarrow I_n (1 - n^2) = \frac{n}{\pi} ((-1)^{n+1} - 1)$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n}{(1 - n^2)\pi} ((-1)^{n+1} - 1)$$

$$\Rightarrow \dot{H}_n = \frac{2\pi}{(1-n^2)\pi} ((-1)^{n+1} - 1) = \sqrt{2}\pi n M_n$$

$$\Rightarrow M_n = \frac{2((-1)^{n+1} - 1)}{\sqrt{2}\pi^2(1-n^2)}$$

Entonces, finalmente en este caso tendremos que:

$$u(x,t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2((-1)^{n+1} - 1)}{\sqrt{2}\pi^2(1-n^2)} \sin(\pi n x) \sin(\sqrt{2}\pi n t)$$