Complementario — "Cálculo Avanzado y Aplicaciones"

¿Qué hacer si nos encontramos con una EDP no homogénea?

En la pregunta 2 del Auxiliar 14 resolvimos una EDP no homogénea haciendo un cambio de variables propuesto, pero, ¿qué hacemos si no nos proponen un cambio de variables? Usemos el mismo ejemplo:

Tenemos la EDP:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 4\sin(2x) & ;\ 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & ;\ t > 0 \\ u(x,0) = 0 & ;\ 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = \pi - x & ;\ 0 < x < L \end{array}}$$

Si tratamos de hacer cambio de variables llegamos a que no se puede, ya que hay un término $\frac{4\sin(2x)}{X\,T}$ que no puede separarse de forma algebráica (ver pág. 6 pauta Aux 14). Este problema es común con las EDP no homogéneas. Entonces, invocamos un cambio de variables:

$$u(x,t) = v(x,t) + \phi$$

Donde ϕ es una función de un parámetro, pero, ¿cuál? Dependerá del parámetro de lo que esté al lado derecho de la EDP. En este caso tenemos $u_{tt} - u_{xx} = 4\sin(2x)$, como el lado derecho depende de x, entonces $\phi = \phi(x)$. Entonces:

$$u(x,t) = v(x,t) + \phi(x) \Rightarrow v(x,t) = u(x,t) - \phi(x)$$

Lo que queremos es que nuestra nueva función $v(x,t)$ cumpla la misma EDP, pero homogénea, es decir:

$$v_{tt} - v_{xx} = 0 \longrightarrow (*)$$

Veamos qué debe cumplir $\phi(x)$ una vez que planteamos esta condición:

(i) $v_{tt} = u_{tt} - \cancel{\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\phi(x))}^{0} \Rightarrow v_{tt} = u_{tt}$

(ii) $v_{xx} = u_{xx} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\phi(x)) \Rightarrow v_{xx} = u_{xx} - \frac{d^2\phi}{dx^2}$

Entonces, reemplazando en $(*)$:

$$v_{tt} - v_{xx} = 0 \Rightarrow \underbrace{u_{tt} - u_{xx}}_{\text{Por el problema original, esto vale } 4\sin(2x)} + \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4\sin(2x) + \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\sin(2x)}$$

Condición que debe cumplir $\phi(x)$

Desde acá podemos integrar para obtener $\phi(x)$:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -4\sin(2x) \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \frac{4}{2}\cos(2x) + C_1 \Rightarrow \phi(x) = \frac{4}{4}\sin(2x) + C_1 x + C_2$$

Podemos escoger con total libertad $C_1 = C_2 = 0$, ya que lo que vuelve homogénea nuestra EDP no es la función $\phi(x)$, sino que su segunda derivada (donde C_1 y C_2 desaparecen), de esa manera:

$$\boxed{\phi(x) = \sin(2x)}$$ → Mismo cambio de variable propuesto...

Luego de eso, se procede tal cual como está en la pauta desde la parte (b).