

P1 Tenemos la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad \alpha > 0$$

Usando el método de separación de variables, diremos que $u(x,t) = X(x)T(t)$, en vez de al ingresarla en la ecuación.

$$\Rightarrow X \frac{dT}{dt} - \alpha T \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \quad / \quad \frac{1}{X \cdot T} \quad \left(\text{Buscamos soluciones no triviales, es decir, } X(x) \neq 0 \text{ y } T(t) \neq 0 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{T'}{T} - \alpha \frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T} = \alpha \frac{X''}{X} = -\lambda \quad \text{Separación de variables}$$

$$\Rightarrow \boxed{T' + \lambda T = 0 \quad \text{y} \quad X'' + \frac{\lambda}{\alpha} X = 0}$$

Veamos que obtenemos según el signo de λ :

(i) $\lambda = 0$ En este caso tendremos:

$$(a) T' = 0 \Rightarrow T(t) = A$$

$$(b) X'' = 0 \Rightarrow X(x) = Bx + C$$

Veamos que pasa con nuestras condiciones iniciales y de borde:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow X(x) = Bx$$

$$u_x(x,t) = X'(x)T(t) = BA$$

$$u_x(\pi,t) = -\beta u(\pi,t) \Rightarrow BA = -\beta B\pi A \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\pi}$$

①

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow ABx = f(x)$$

Como β y $f(x)$ son arbitrarios, y $\lambda = 0$ nos conduce a un valor exacto de β y a una forma restringida de $f(x)$, entonces descartamos este caso.

(ii) $\lambda < 0$ En ese caso tendremos:

$$(a) T' + \lambda T = 0 \Rightarrow T(t) = A \cdot e^{\lambda t}$$

$$(b) X'' - \frac{|\lambda|}{\alpha} X = 0 \Rightarrow X(x) = B e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x} + C e^{-\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x}$$

Usamos la condición $u(0,t) = 0$:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow B + C = 0 \Rightarrow C = -B$$

$$\Rightarrow X(x) = B(e^{\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x} - e^{-\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x}) \Rightarrow X(x) = 2B \sinh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x\right)$$

Podemos escribir $u(x,t)$ como:

$$u(x,t) = 2AB e^{\lambda t} \sinh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x\right)$$

Usando la condición $u_x(\pi,t) = -\beta u(\pi,t)$ tendremos que:

$$u_x(x,t) = 2AB \sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} e^{\lambda t} \cosh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} x\right)$$

$$\Rightarrow 2AB \sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} e^{\lambda t} \cosh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} \pi\right) = -\beta 2AB e^{\lambda t} \sinh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} \pi\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} = \frac{-\beta \sinh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} \pi\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}} \pi\right)}$$

Podemos cancelar las constantes AB de ambas lados porque son no nulas (si no, tendríamos $X(x) = 0$ o $T(t) = 0$).
También cancelamos la exponencial (siempre positiva)

$$\Rightarrow \left[\tanh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}\pi\right) = -\frac{1}{\beta\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}} \right]$$

La tangente hiperbólica es negativa cuando su Argumento es negativo, entonces Tendremos que:

$$\tanh\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}\pi\right) = -\frac{1}{\beta\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}} < 0 \Rightarrow \left[\sqrt{\frac{|\lambda|}{\alpha}}\pi < 0 \right] \quad \text{Contradicción}$$

$\Rightarrow \lambda > 0$ no nos sirve...

(iii) $\lambda > 0$ En este caso:

$$(a) T' + \lambda T = 0 \Rightarrow \boxed{T(t) = A e^{\lambda t}} \quad (\text{no ha cambiado})$$

$$(b) X'' + \frac{\lambda}{\alpha} X = 0 \Rightarrow \boxed{X(x) = B \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x\right) + C \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x\right)}$$

Usamos la condición $u(0,t) = 0$:

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(x) = C \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x\right)}$$

Entonces podemos escribir $u(x,t)$ como:

$$u(x,t) = AC e^{\lambda t} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x\right) \Rightarrow u_x(x,t) = AC \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} e^{\lambda t} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x\right)$$

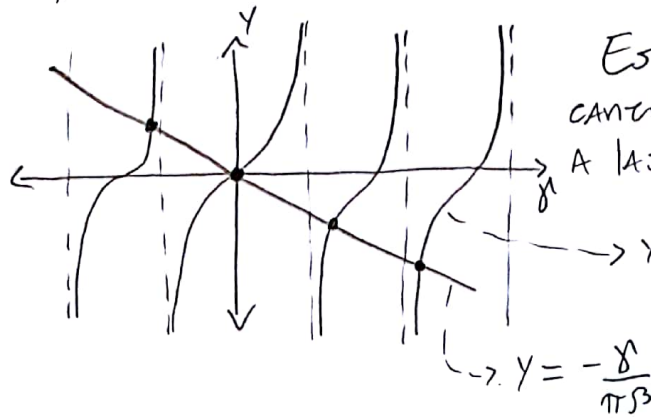
Usamos $u_x(\pi,t) = -\beta u(\pi,t)$:

$$\Rightarrow AC \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} e^{\lambda t} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\pi\right) = -\beta AC e^{\lambda t} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\pi\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\pi\right) = -\frac{1}{\beta\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}}}$$

Definamos $\gamma = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \pi$, entonces tendremos:

$$\tan(\gamma) = -\frac{\gamma}{\pi\beta}$$



Esta ecuación tiene una cantidad numerable de soluciones, a las cuales llamaremos γ_k

Entonces, tendremos que $\gamma_k = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \pi$, de esta manera:

$$\gamma_k^2 = \frac{\lambda \pi^2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\lambda_k = \frac{\gamma_k^2 \alpha}{\pi^2}}$$

→ Valores de λ_k
Dadas por las γ_k que
cumplen $\tan(\gamma_k) = -\frac{\gamma_k}{\pi\beta}$

Entonces, tendremos que:

$$u_k(x,t) = D_k e^{\lambda_k t} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_k}{\alpha}} x\right) / D_k = A_k B_k ; \lambda_k = \frac{\gamma_k^2 \alpha}{\pi^2}$$

Y, por superposición, tendremos finalmente que:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k e^{\frac{\gamma_k^2 \alpha}{\pi^2} t} \sin\left(\frac{\gamma_k x}{\pi}\right)}$$

Nos falta usar la condición $u(x,0) = f(x)$, de esta forma:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{\gamma_k x}{\pi}\right)$$

Entonces, tendremos que D_k son los coeficientes de la función $f(x)$ desarrollada como serie de senos. Una forma directa de hacerlo (ya que no sabemos nada de $f(x)$) es multiplicar ambos lados de la serie:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{\gamma_k}{\pi} x\right) \quad / \cdot \sin\left(\frac{\gamma_l}{\pi} x\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \sin\left(\frac{\gamma_l x}{\pi}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{\gamma_k x}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\gamma_l x}{\pi}\right) \quad / \int_0^{\pi} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{\gamma_l x}{\pi}\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{\gamma_k x}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\gamma_l x}{\pi}\right) dx$$

Por ortogonalidad del seno, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{\gamma_k x}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\gamma_l x}{\pi}\right) dx = 0$ (lo cual sigue cumpliéndose para $\int_0^{\pi} dx$) para $k \neq l$. Entonces, tomando el caso $k=l$:

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{\gamma_l x}{\pi}\right) dx = D_l \int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{\gamma_l x}{\pi}\right) dx \Rightarrow D_k = \frac{\int_0^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{\gamma_k x}{\pi}\right) dx}{\int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{\gamma_k x}{\pi}\right) dx}$$

Entonces, tendremos finalmente que:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\int_0^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{\gamma_k x}{\pi}\right) dx}{\int_0^{\pi} \sin^2\left(\frac{\gamma_k x}{\pi}\right) dx} \right) e^{\frac{\gamma_k^2}{\pi^2} t} \sin\left(\frac{\gamma_k}{\pi} x\right)$$

P2k (e) Trátemos de usar separación de variables:

$$u(x,t) = \bar{X}(x) T(t) \Rightarrow \bar{X} \frac{d^2 T}{dt^2} - T \frac{d^2 \bar{X}}{dx^2} = 4 \sin(2x)$$

En este paso dividíamos por $\bar{X}(x) T(t)$, sin embargo eso no nos deja las variables separadas,

$$\bar{X} \frac{d^2 T}{dt^2} - T \frac{d^2 \bar{X}}{dx^2} = 4 \sin(2x) \quad / \cdot \frac{1}{\bar{X} T}$$

$$\Rightarrow \frac{T''}{T} - \frac{\bar{X}''}{\bar{X}} = \frac{4 \sin(2x)}{\bar{X} T}$$

Como se puede notar, el término de la derecha sigue dependiendo de ambas variables, y no hay forma algebraica de eliminar esta dependencia... ¿o sí?

(b) La verdad es que sí, se puede eliminar esta dependencia para poder usar separación de variables, y el modo es un cambio de variables. Sea $v(x,t) = u(x,t) - \sin(2x)$. Veamos que ecuación cumple $v(x,t)$, para ello tratamos de ermar la misma EDP. Veamos que:

$$u(x,t) = v(x,t) + \sin(2x) \Rightarrow u_{tt}(x,t) = v_{tt}(x,t)$$

$$\Rightarrow u_{xx}(x,t) = v_{xx}(x,t) - 4 \sin(2x)$$

Reemplazamos en la EDP:

$$u_{tt} - u_{xx} = 4 \sin(2x) \Rightarrow v_{tt} - v_{xx} + 4 \sin(2x) = 4 \sin(2x)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{tt} - v_{xx} = 0}$$

Lo maravilloso es que la ecuación diferencial asociada a $v(x,t)$ SÍ puede resolverse con separación de variables. Veamos que pasa con las condiciones de borde e iniciales usando $u(x,t) = v(x,t) + \sin(2x)$:

$$(i) u(0,t) = v(0,t) + \sin(0) = 0 \Rightarrow \boxed{v(0,t) = 0}$$

$$(ii) u(\pi,t) = v(\pi,t) + \sin(2\pi) = 0 \Rightarrow \boxed{v(\pi,t) = 0}$$

$$(iii) u(x,0) = v(x,0) + \sin(2x) = 0 \Rightarrow \boxed{v(x,0) = -\sin(2x)}$$

$$(iv) u_t(x,0) = v_t(x,0) = \pi - x \Rightarrow \boxed{v_t(x,0) = \pi - x}$$

Entonces, el problema a resolver con método de separación de variables es

$$\boxed{\begin{aligned} v_{tt} - v_{xx} &= 0 \quad ; \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ v(0,t) &= v(\pi,t) = 0 \quad ; \quad t > 0 \\ v(x,0) &= -\sin(2x) \quad ; \quad 0 < x < \pi \\ v_t(x,0) &= \pi - x \quad ; \quad 0 < x < \pi \end{aligned}}$$

Sea $v(x,t) = X(x)T(t)$, tendremos que:

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} - T \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{XT}$$

$$\Rightarrow \frac{T''}{T} - \frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{T'' + \alpha T = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{X'' + \alpha X = 0}$$

Resolvamos la ecuación para X :

$$X'' + \alpha X = 0$$

(i) Caso $\alpha < 0$ En este caso tendremos la solución:

$$X(x) = A e^{\sqrt{\alpha}x} + B e^{-\sqrt{\alpha}x}$$

Usamos las condiciones de borde:

$$U(0,t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$\Rightarrow X(x) = A(e^{\sqrt{\alpha}x} - e^{-\sqrt{\alpha}x})$$

$$U(\pi,t) = 0 \Rightarrow X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0 \Rightarrow A(e^{\sqrt{\alpha}\pi} - e^{-\sqrt{\alpha}\pi}) = 0$$

$$\Rightarrow e^{\sqrt{\alpha}\pi} = e^{-\sqrt{\alpha}\pi} \Rightarrow e^{2\sqrt{\alpha}\pi} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{\alpha}\pi = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0} \quad \text{Contradicción} \quad \text{habíamos dicho } \alpha < 0$$

El otro caso es que $A = 0$, pero en ese caso $X(x) = 0$, lo cual no nos sirve...

(ii) Caso $\alpha = 0$ En ese caso:

$$X(x) = Ax + B$$

$$U(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow X(x) = Ax$$

$$U(\pi,t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0 \Rightarrow A\pi = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \quad \text{No sirve!}$$

(iii) Caso $\alpha > 0$ En ese caso:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\alpha}x) + B \sin(\sqrt{\alpha}x)$$

$$U(0,t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow X(x) = B \sin(\sqrt{\alpha}x)$$

$$U(\pi,t) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0 \Rightarrow B \sin(\sqrt{\alpha}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha}\pi = n\pi \Rightarrow \boxed{\alpha_n = n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{X_n(x) = B_n \sin(nx)}$$

Ahora resolvemos para $T(t)$ sabiendo que $\alpha = n > 0$, Así:

$$T'' + \alpha_n T = 0 \Rightarrow T_n(t) = C_n \cos(\sqrt{\alpha_n} t) + D_n \sin(\sqrt{\alpha_n} t)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_n(t) = C_n \cos(nt) + D_n \sin(nt)}$$

Entonces, tendremos que:

$$U_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_n(x,t) = M_n \cos(nt) \sin(nx) + N_n \sin(nt) \sin(nx) ; M_n = B_n C_n, N_n = B_n D_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (M_n \cos(nt) \sin(nx) + N_n \sin(nt) \sin(nx))}$$

Ahora usamos las condiciones iniciales:

$$U(x,0) = -\sin(2x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin(nx) = -\sin(2x) \Rightarrow M_n = \begin{cases} -1 & ; n=2 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{U(x,t) = -\cos(2t) \sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} N_n \sin(nt) \sin(nx)}$$

$$\Rightarrow U_t(x,t) = 2 \sin(2t) \sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} N_n \cdot n \cos(nt) \sin(nx)$$

$$U_t(x,0) = \pi - x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n N_n \sin(nx) = \pi - x$$

Calculamos la serie de senos de la función $\pi - x$, es decir, encontramos los coeficientes H_n tales que:

$$\pi - x = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin(nx)$$

Por definición, si:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Expansión} \\ \text{en senos de} \\ \text{la función } f(x) \end{array}$$

Entonces tendremos que:

$$H_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx \quad \left/ \begin{array}{l} \text{En nuestro caso} \\ l = \pi, f(x) = \pi - x \\ \text{entonces:} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow H_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^{\pi} \sin(nx) dx - \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \right] \quad \left/ \begin{array}{l} \text{La segunda} \\ \text{integral se calcula} \\ \text{conderalle en el} \\ \text{Aux 13} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow H_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{n} (-\cos(nx)) \Big|_0^{\pi} + \frac{\pi}{n} \cos(\pi n) \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{n} (-\cos(\pi n) + \cos(0)) + \frac{\pi}{n} \cos(\pi n) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n = \frac{2}{n}} \quad \begin{array}{l} \text{Ahora, notamos que} \\ H_n = n N_n \Rightarrow N_n = \frac{H_n}{n} \Rightarrow N_n = \frac{2}{n^2} \end{array}$$

Así, Finalmente tendremos que:

$$v(x,t) = -\cos(2t) \sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \sin(nt) \sin(nx)$$

Desahaciendo el cambio de variable, $u(x,t) = v(x,t) + \sin(2x)$, entonces:

$$\boxed{u(x,t) = (1 - \cos(2t)) \sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \sin(nt) \sin(nx)} //$$