MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Juvenal Letelier.
Auxiliar: Roberto Gajardo Pizarro.

Auxiliar 13: Series de Fourier y EDP.

17 de Junio de 2019

P1. Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \ 0 < x < \pi \\ 0 & ; \ -\pi < x < 0 \end{cases}$$

a) Calcule la serie de Fourier de $f(x)$.

b) Usando la serie de Fourier calculada, muestre que:

$$\sum_{n \ impar} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

P2. Para la función $f(x) = |x|$:

a) Encuentre su serie de Fourier en el intervalo $x \in [-1, 1]$.

b) Su expansión en serie de senos en el intervalo $[0, 1]$.

c) Su expansión en serie de cosenos en el intervalo $[0, 1]$.

P3. a) Resolveremos la ecuación de onda en 1 dimensión para una cuerda de largo π (es decir, $x \in [0, \pi]$) y para tiempos positivos ($t \geq 0$), la cual cumple la siguiente ecuación en derivadas parciales para la función $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

En este caso usaremos una cuerda con extremos fijos, es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \ ; \ t \geq 0$$

Y además, usaremos las siguientes condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & ; \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \ ; \ 0 < x < \pi$$

b) Muestre qué sucede si se cambia la condición inicial por:

$$u(x, 0) = \cos^2(x) \ ; \ 0 < x < \pi$$

P4. La ecuación de Helmholtz, muy usada en electrodinámica y en física nuclear, es una ecuación en derivadas parciales dada por:

$$\Delta u + u = 0$$

Resuelva el caso en dos dimensiones ($u = u(x, y)$) para el dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 2\}$ con las condiciones de borde $u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0 \ , \ u(x, 2) = x(x - 1)$.