

MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.

Profesor: Juvenal Letelier.

Auxiliar: Roberto Gajardo Pizarro.



Auxiliar 12: Transformada de Fourier.

10 de Junio de 2019

P1. Calcule la transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

P2. Calcule la transformada de Fourier de las siguientes funciones a trozos:

a)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

b) Para $k \in \mathbb{R}$ y $a > 0$:

$$g(x) = \begin{cases} k & ; |x| \leq a \\ 0 & ; |x| > a \end{cases}$$

P3. Calcule la transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

P4. La finalidad de éste problema será demostrar el **teorema de Shannon**. Primero, una función f se dice de *banda limitada* en s_0 si:

$$\hat{f}(s) = 0, \quad |s| > s_0$$

Teorema de Shannon: Sea f una función continua tal que existen su transformada y antitransformada de Fourier. Si f es de banda limitada en s_0 y $L = \frac{\pi}{s_0}$, entonces se puede expandir $f(x)$ en la siguiente serie:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nL) \frac{\sin(s_0(x - nL))}{s_0(x - nL)}$$

Demuéstrelo usando los siguientes pasos:

a) Considere una familia de funciones $\hat{\phi}_n$ dadas por:

$$\hat{\phi}_n(s) = \begin{cases} 0 & ; |s| > s_0 \\ (2s_0)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-in\pi s}{s_0}} & ; |s| \leq s_0 \end{cases}$$

Demuestre que la antitransformada de Fourier para cada una de éstas funciones está dada por:

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{s_0}{\pi}} \frac{\sin(s_0 x - n\pi)}{s_0 x - n\pi}$$

- b) Demuestre que la familia $\{\hat{\phi}_n(s)\}$ es una familia de funciones *ortonormales*, es decir, que el producto interno para funciones complejas entre $\hat{\phi}_n(s)$ y $\hat{\phi}_m(s)$ es 0 para $n \neq m$ y 1 para $n = m$.
- c) Muestre que la familia $\{\hat{\phi}_n(s)\}$ permite escribir la función f como una serie de Fourier, cuyos coeficientes están en función de muestras de la función en intervalos de largo L , y concluya.