MA2002-2. Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Juvenal Letelier.
Auxiliar: Roberto Gajardo Pizarro.

Auxiliar 11: Resolución Control 2

Lunes 3 de Junio, 2019.

Problema 1.

a) Considere la función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

Pruebe que la función u es armónica, es decir, $\Delta u = 0$

b) Considere una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, una función entera tal que $f = u + iv$. Si u es la función dada por

$$u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$$

encuentre la función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

c) Escriba la función anterior $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, en función de la variable compleja $z = x + iy$.

Problema 2.

a) Calcule la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{1 + x^4} dx$$

b) Un voltaje impulsivo $V(t)$ es un pulso de voltaje extremadamente alto, pero de muy corta duración. Una buena aproximación viene dada por la integral de frecuencias

$$V(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_\omega(t)\ d\omega \quad , \quad v_\omega(t) = \frac{V_0}{2\pi} exp(i\omega t),$$

donde $v_\omega(t)$ es el potencial instantáneo y V_0 es el área bajo la curva del gráfico $V(t)$ v/s t.
Una resistencia R y una inductancia L están conectadas en serie a una fuente de voltaje impulsivo $V(t)$. La corriente instantánea $I_\omega(t)$, debida al potencial instantáneo $v_\omega(t)$, es

$$I_\omega(t) = \frac{v_\omega(t)}{R + i\omega L} = \frac{V_0}{2\pi} \frac{exp(i\omega t)}{R + i\omega L}$$

Luego, la corriente total producida es:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I_\omega(t)\ d\omega = \frac{V_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{exp(i\omega t)}{R + i\omega L}\ d\omega$$

Calcule esta integral para $t > 0$ y $t < 0$.

Problema 3.

Sea $\Gamma : |z-a| = a$ la circunferencia de radio $a > 0$ centrada en $z_0 = a$. Demuestre, justificando adecuadamente, que se tienen las siguientes identidades para las integrales:

i) $I_{-k}(a) = \displaystyle\oint_\Gamma \frac{z^2(z-a)^{k-2}}{z+a}\, dz = 0 \quad , \quad k = 2, 3, ...$

ii) $I_{-1}(a) = \displaystyle\oint_\Gamma \frac{z^2}{z^2-a^2}\, dz = i\pi a$

iii) $I_k(a) = \displaystyle\oint_\Gamma \frac{z^2}{(z+a)(z-a)^{k+2}}\, dz = \frac{i^{2k-1}}{2}\frac{\pi}{(2a)^k} \quad , \quad k = 1, 2, 3, ...$

Nota:

i) Recuerde la serie $(1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - u^3 + ...$

ii) Recuerde que

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}}[(z-z_0)^m f(z)].$$