

P2 Queremos hacer la integral:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2(z-3)} ; \quad \Gamma: \text{Circunferencia de radio 2 en el plano complejo...}$$

Podemos hacerla con fórmula integral de Cauchy o usando residuos. Hagamos ambos métodos.

1. Fórmula integral de Cauchy: Notemos que la función $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)}$ tiene 3 polos (f(z) se indefinice), $z_0=0$ es de orden 2 y $z_1=3$ es de orden 1. Sin embargo, el único punto que está dentro de la circunferencia es $z_0=0$, por lo tanto, si definimos $g(z) = \frac{1}{z-3}$, tendremos que $g(z)$ es holomorfa en $\text{Int}(\Gamma)$, entonces tendremos que:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{z^2} = \oint_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{(z-0)^2}$$

Podemos usar la fórmula integral de Cauchy para derivadas...

$$\oint_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{(z-0)^2} = \frac{2\pi i}{(2-1)!} \cdot \left[\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} (g(z)) \right]_{z=0} = 2\pi i \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-3} \right) \right]_{z=0}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-1}{(z-3)^2} \right) \bigg|_{z=0} = 2\pi i \cdot \left(\frac{-1}{(-3)^2} \right) \Rightarrow \oint_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{(z-0)^2} = \frac{-2\pi i}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2(z-3)} = \frac{-2\pi i}{9}}$$

2. Usando residuos: Calculamos el residuo del polo $z_0=0$, ya que es el único en $\text{Int}(\Gamma)$, entonces:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2(z-3)(z-1)} = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0))$$

Calculamos el residuo:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z) \right) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Tenemos } n=2 \Rightarrow n-1=1 \\ \text{y } z_0=0 ; (n-1)! = 1! = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{z^2(z-3)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{(z-3)^2} \right) = -\frac{1}{9}$$

Enlaces:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z-3)} = \frac{-2\pi i}{9} \rightarrow \text{Mismo resultado!}$$