

P1 Queremos demostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx = \frac{\pi}{8a^3}$ usando la fórmula integral

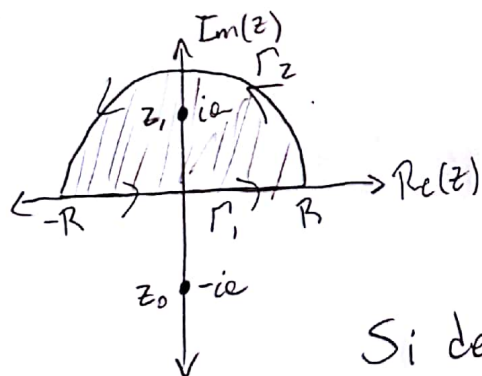
de Cauchy. Usamos la función Análoga en variable compleja e integramos en un camino cerrado, es decir:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2+a^2)^3}$$

Notamos que existen polos, los cuales buscamos igualando el denominador a cero:

$$(z^2+a^2)^3 = 0 \Rightarrow ((z+ia)(z-ia))^3 = 0 \Rightarrow (z+ia)^3(z-ia)^3 = 0$$

Entonces, tenemos que $z_0 = -ia$ y $z_1 = ia$ son polos (ambos de orden 3).



Notemos que, al reescribir la integral:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2+a^2)^3} = \oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z+ia)^3(z-ia)^3}$$

Si definimos $g(z) = \frac{z^2}{(z+ia)^3}$, notamos que $g(z)$ es

holomorfa en $\text{Int}(\Gamma)$, donde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es la semicircunferencia cuyas extremos están unidos por una recta real (ver figura). La gracia de usar este camino de integración es que nuestra integral toma la forma:

$$I = \oint_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{(z-ia)^3} ; g(z) = \frac{z^2}{(z+ia)^3} \text{ holomorfa en } \text{Int}(\Gamma)$$

Esta integral nos sugiere la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-w)} = 2\pi i f(w) ; f \text{ holomorfa en } \text{Int}(\Gamma) \\ w \in \text{Int}(\Gamma)$$

Donde en nuestro caso $w = ia$ (y efectivamente $ia \in \text{Int}(\Gamma)$), sin embargo, nosotros tenemos $(z - ia)^3$, no $(z - ia)$. Ese exponente no nos permite usar la forma usual de la fórmula integral de Cauchy, en estos casos debemos usar la fórmula integral de Cauchy para derivadas:

$$\left[\oint_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{(z-w)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [g(z)] \Big|_{z=w} \right]$$

En nuestro caso $w = ia$, $n = 3$ y $g(z) = \frac{z^2}{(z+ia)^3}$, entonces:

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2 + a^2)^3} = \oint_{\Gamma} \frac{g(z) dz}{(z-ia)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{z^2}{(z+ia)^3} \right] \Big|_{z=ia}$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z+ia)^3} \right) = \frac{2z(z+ia)^3 - z^2 \cdot 3(z+ia)^2}{(z+ia)^6} = \frac{2z}{(z+ia)^3} - \frac{3z^2}{(z+ia)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z^2}{(z+ia)^3} \right) = \frac{2(z+ia)^3 - 2z \cdot 3(z+ia)^2}{(z+ia)^6} - \left(\frac{6z(z+ia)^4 - 3z^2 \cdot 4(z+ia)^3}{(z+ia)^8} \right)$$

$$= \frac{2}{(z+ia)^3} - \frac{6z}{(z+ia)^4} - \frac{6z}{(z+ia)^4} + \frac{12z^2}{(z+ia)^5}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z^2}{(z+ia)^3} \right) \Big|_{z=ia} = \frac{2}{(zia)^3} - \frac{6ia}{(zia)^4} - \frac{6ia}{(zia)^4} + \frac{12ia^2}{(zia)^5}$$

$$= \frac{2 \cdot (zia)^2 - 12(ia)^2 - 12(ia)^2 + 12(ia)^2}{(zia)^5} = \frac{-8a^2 + 12a^2}{32ia^5} = \frac{1}{8ia^3}$$

Entonces:

$$\oint_{\Gamma} \frac{g(z)}{(z-ia)^3} = \frac{2\pi i}{2} \cdot \frac{1}{8ia^3} = \frac{\pi}{8a^3} \Rightarrow \left[\oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{8a^3} \right]$$

Hicimos la mitad del ejercicio. Sabemos que la integral I (compleja) vale $\frac{\pi}{8a^3}$, sin embargo, nosotros queremos que la integral REAL sea esto. Para hacer la conexión, hacemos la integral compleja explícitamente (en el camino $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$). Ahora:

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^3} dz = \underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{z^2 dz}{(z^2+a^2)^3}}_{(i)} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \frac{z^2 dz}{(z^2+a^2)^3}}_{(ii)}$$

(i) $\Gamma_1: z = t ; t \in [-R, R] \Rightarrow dz = dt$ y $f(z) = \frac{t^2}{(t^2+a^2)^3}$

Entonces:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{z^2 dz}{(z^2+a^2)^3} = \int_{-R}^R \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^3}$$

(ii) $\Gamma_2: z = Re^{i\theta} ; \theta \in [0, \pi]$ (Parametrización de una semicircunferencia en forma polar, plano complejo)

$$\Rightarrow dz = iRe^{i\theta} d\theta \quad \text{y} \quad f(z) = \frac{R^2 e^{2i\theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + a^2)^3}$$

Entonces:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{z^2 dz}{(z^2+a^2)^3} = \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2i\theta} \cdot iRe^{i\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + a^2)^3}$$

Así, al hacer tender R a infinito, tendremos que:

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2+a^2)^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^3} + \lim_{R \rightarrow \infty} iR^3 \int_0^{\pi} \frac{e^{3i\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + a^2)^3}$$

Debemos demostrar que, cuando $R \rightarrow \infty$, la integral que tiene a R en su integrando se anula. Para ello acotamos.

$$\left| iR^3 \int_0^\pi \frac{e^{3i\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + a^2)^3} \right| = |iR^3| \cdot \left| \int_0^\pi \frac{e^{3i\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + a^2)^3} \right| \leq R^3 \int_0^\pi \frac{|e^{3i\theta}| d\theta}{|(R^2 e^{2i\theta} + a^2)^3|}$$

$$= R^3 \int_0^\pi \frac{d\theta}{|R^2 e^{2i\theta} + a^2|^3} \quad \left/ \begin{array}{l} |R^2 e^{2i\theta} + a^2| = |R^2 \cos(2\theta) + iR^2 \sin(2\theta) + a^2| \\ = |(R^2 \cos(2\theta) + a^2) + iR^2 \sin(2\theta)| = \sqrt{R^4 \cos^2(2\theta) + 2R^2 a^2 \cos(2\theta) + a^4 + R^4 \sin^2(2\theta)} \\ \Rightarrow |R^2 e^{2i\theta} + a^2| = \sqrt{R^4 + 2R^2 a^2 \cos(2\theta) + a^4} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| iR^3 \int_0^\pi \frac{e^{3i\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + a^2)^3} \right| \leq R^3 \int_0^\pi \frac{d\theta}{(R^4 + 2R^2 a^2 \cos(2\theta) + a^4)^{3/2}} \leq R^3 \int_0^\pi \frac{d\theta}{(R^4 + 2R^2 a^2 \cos(\theta))^{3/2}}$$

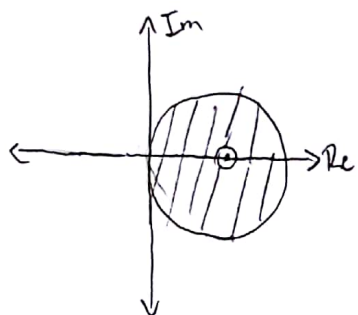
$$= R^3 \int_0^\pi \frac{d\theta}{R^3 (R^2 + 2a^2 \cos(2\theta))^{3/2}} \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Entre } 0 \text{ y } \pi \\ \cos(2\theta) \geq -1 \end{array} \right.$$

$$\leq \frac{R^3}{R^3} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(R^2 - 2a^2)^{3/2}} = \frac{1}{(R^2 - 2a^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{(R^2 - 2a^2)^{3/2}} \stackrel{\lim_{R \rightarrow \infty}}{=} 0$$

Entonces, $\lim_{R \rightarrow \infty} iR^3 \int_0^\pi \frac{e^{3i\theta} d\theta}{(R^2 e^{2i\theta} + a^2)^3} = 0$, así, finalmente.

$$\underbrace{\oint_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2 + a^2)^3}}_{\frac{\pi}{8a^3}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^3} \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{8a^3}}$$

Py  Tenemos la función $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, y queremos encontrar su expansión en serie de Laurent en el Anillo $0 < |z-1| < 1$ (es un Anillo porque las desigualdades son estrictas).



Por definición, la serie de Laurent de una función $f(z)$ en un anillo centrado en z_0 es:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k ; a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$

"Anillo centrado en $z_0=1$ "

Entonces en nuestro caso, al reemplazar $z_0=1$

y $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, tendremos:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z-1)^k ; \left[a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)^{k+1}} \right] \rightarrow \text{La finalidad del ejercicio es encontrar estas coeficientes } a_k \text{ sólo en función de } k \dots$$

Tendremos dos casos según el exponente:

(i) $k+2 \leq 0$:

En este caso tendremos la integral:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{(z-1)^{-(k+2)}}{z} dz$$

---> Recordar que $-(k+2) \geq 0$, entonces la función sólo se define en $z=0$, sin embargo 0 no está dentro del anillo, entonces, la función del integrando es regular, y como está integrada en un camino cerrado, tendremos que

$$\boxed{a_k = 0 ; k+2 \leq 0}$$

(ii) $k+2 > 0$: En este caso la integral mantiene el denominador original:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)^{k+2}} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi i}{(k+2-1)!} \left[\frac{d^{(k+2-1)}}{dz^{(k+2-1)}} \left(\frac{1}{z} \right) \right]_{z=1}$$

Donde en la segunda igualdad se usó la fórmula integral de Cauchy para derivadas.

Trabajemos en la derivada y busquemos algún patrón:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \Rightarrow \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{z^3} \Rightarrow \frac{d^3}{dz^3}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{6}{z^4} \Rightarrow \frac{d^4}{dz^4}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{24}{z^5}$$

Notamos que:

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{z^{n+1}} \Rightarrow \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}\left(\frac{1}{z}\right) = (-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot \frac{1}{z^{k+2}}$$

Entonces:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi i}{(k+1)!} \left[\frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}}\left(\frac{1}{z}\right) \right]_{z=1} = \frac{1}{(k+1)!} (-1)^{k+1} (k+1)! \cdot \left[\frac{1}{z^{k+2}} \right]_{z=1} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{1^{k+2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_k = (-1)^{k+1} ; k+2 > 0}$$

Entonces, finalmente tenemos que:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z-1)^k ; a_k = \begin{cases} 0 & ; k \leq -2 \\ (-1)^{k+1} & ; k > -2 \end{cases} \rightarrow \text{Serie de Laurent buscada...}$$

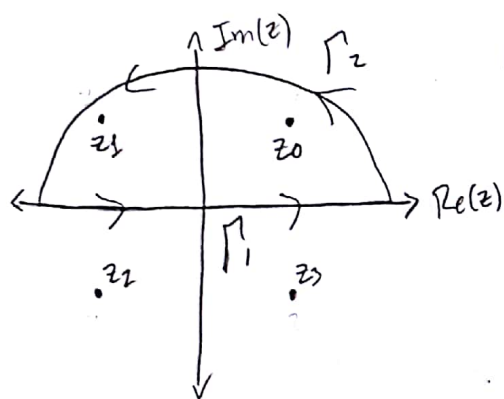
P6 Queremos calcular la integral real $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ usando teorema de

residuos. Usamos la función análoga en variable compleja:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz ; f(z) = \frac{1}{1+z^4} \longrightarrow \text{Debemos buscar los polos de esta función, para eso, buscamos los } z \text{ tales que } 1+z^4=0$$

$$1+z^4=0 \Rightarrow z^4=-1 \Rightarrow z = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{4}} ; k=0,1,2,3$$

$$\Rightarrow z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}} ; z_1 = e^{\frac{3i\pi}{4}} ; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}} ; z_3 = e^{\frac{7i\pi}{4}}$$



(*) PARA USAR teorema de residuos, necesitamos ver qué polos encerramos en el camino de integración que usamos. Por ejemplo, si usamos el típico camino de integración de la semicircunferencia, encerramos z_0 y z_1 . Entonces, por teorema de residuos:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_k)$$

Tenemos que:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)) ; \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

Además:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^4} = \underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z^4}}_{(i)} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^4}}_{(ii)}$$

Desarrollemos estas integrales:

$$(i) \Gamma_1 : z = t ; t \in [-R, R] \Rightarrow dz = dt \text{ y } f(z) = \frac{1}{1+t^4}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z^4} = \int_{-R}^R \frac{dt}{1+t^4}$$

$$(ii) \Gamma_2: z = Re^{i\theta}; \theta \in [0, \pi] \Rightarrow dz = iRe^{i\theta} \text{ y } f(z) = \frac{1}{1+R^4 e^{4i\theta}}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^4} = \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{1+R^4 e^{4i\theta}}$$

Entonces, con el límite $R \rightarrow \infty$:

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} + \lim_{R \rightarrow \infty} iR \int_0^\pi \frac{e^{i\theta} d\theta}{1+R^4 e^{4i\theta}}$$

Acorramos la 2ª integral:

$$\left| iR \int_0^\pi \frac{e^{i\theta} d\theta}{1+R^4 e^{4i\theta}} \right| \leq R \int_0^\pi \frac{|e^{i\theta}| d\theta}{|1+R^4 e^{4i\theta}|} = R \int_0^\pi \frac{d\theta}{|1+R^4 e^{4i\theta}|}$$

Calculamos el módulo:

$$|1+R^4 e^{4i\theta}| = |1+R^4 \cos(4\theta) + iR^4 \sin(4\theta)| = |(1+R^4 \cos(4\theta)) + iR^4 \sin(4\theta)|$$

$$\Rightarrow |1+R^4 e^{4i\theta}| = \sqrt{1+2R^4 \cos(4\theta) + R^8}$$

$$\Rightarrow \left| iR \int_0^\pi \frac{e^{i\theta} d\theta}{1+R^4 e^{4i\theta}} \right| \leq R \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1+2R^4 \cos(4\theta) + R^8}} \leq R \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{R^8 + 2R^4 \cos(4\theta) + 1}}$$

$$= R \int_0^\pi \frac{d\theta}{R^2 \sqrt{R^4 + 2\cos(2\theta) + 1}} \stackrel{[\text{Ver P1}]}{\leq} \frac{1}{R} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{R^4 - 2}} = \frac{\pi}{R\sqrt{R^4 - 2}} \stackrel{R \rightarrow \infty}{=} 0$$

$$\text{Entonces, } \lim_{R \rightarrow \infty} iR \int_0^\pi \frac{e^{i\theta} d\theta}{1+R^4 e^{4i\theta}} = 0$$

Entonces:

$$\Rightarrow \oint \frac{dz}{1+z^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = 2\pi i (\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1))$$

Debemos calcular las residuas usando la fórmula:

$$\text{Res}(f, z_n) = \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_n)^n f(z)]; \quad n = \text{orden del polo}$$

Tenemos z_0 y z_1 , que son de orden 1, entonces:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{(z-e^{\frac{i\pi}{4}})}{1+z^4} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}}}$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z-z_1) f(z) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{3\pi i}{4}}} \frac{(z-e^{\frac{3\pi i}{4}})}{1+z^4} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{z \rightarrow e^{\frac{3\pi i}{4}}} \frac{1}{4z^3}$$

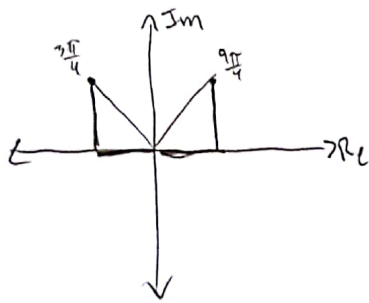
$$\Rightarrow \boxed{\text{Res}(f, z_1) = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}}}$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}} \right) = \frac{2\pi i}{4} (e^{-\frac{3\pi i}{4}} + e^{-\frac{9\pi i}{4}})$$

Usando la relación $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$:

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi i}{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) \right)$$



Notamos que $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4})$ y $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi i}{2} (-2i \sin(\frac{3\pi}{4})) = \pi \sin(\frac{3\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad / \quad \text{Como } \frac{1}{1+t^4} \text{ es función par, entonces}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = 2I$$

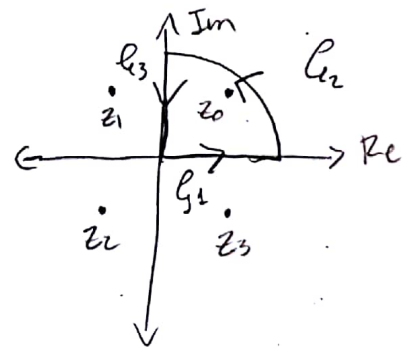
Entonces:

$$2I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$$

Volvamos a (*), ¿qué pasa si usamos otro camino de integración, digamos Γ , tal que encierra sólo un polo (en este caso z_0)?

No debería cambiar el resultado de nuestra integral real, pero si el procedimiento intermedio,

Veamos:



$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) ; \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^4} = \underbrace{\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z^4}}_{(i)} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^4}}_{(ii)} + \underbrace{\int_{\Gamma_3} \frac{dz}{1+z^4}}_{(iii)}$$

$$(i) \ell_1: z = t; t \in [0, R] \Rightarrow dz = dt \text{ y } f(z) = \frac{1}{1+t^4}$$

$$\Rightarrow \int_{\ell_1} \frac{dz}{1+z^4} = \int_0^R \frac{dt}{1+t^4}$$

$$(ii) \ell_2: z = Re^{i\theta} \Rightarrow dz = iRe^{i\theta} d\theta \text{ y } f(z) = \frac{1}{1+R^4 e^{4i\theta}}$$

$$\theta \in [0, \pi/2]$$

$$\Rightarrow \int_{\ell_2} \frac{dz}{1+z^4} = \int_0^{\pi/2} \frac{iRe^{i\theta} d\theta}{1+R^4 e^{4i\theta}}$$

$$(iii) \ell_3: z = it; t \in [0, R] \text{ (pero va de } R \text{ a } 0); \Rightarrow dz = i dt \text{ y } f(z) = \frac{1}{1+(it)^4}$$

$$(it)^4 = i^4 t^4 = t^4$$

$$\Rightarrow \int_{\ell_3} \frac{dz}{1+z^4} = \int_R^0 \frac{idt}{1+t^4} = -i \int_0^R \frac{dt}{1+t^4}$$

Entonces, al hacer $R \rightarrow \infty$, tendremos:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{1+z^4} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} - i \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} + \lim_{R \rightarrow \infty} iR \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\theta} d\theta}{1+R^4 e^{4i\theta}}$$

Acorar la 3ª integral es análogo al caso anterior. Tendremos:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{1+z^4} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} - i \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} \text{ y } \oint_{\gamma} \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} - i \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{4} (\cos(\frac{2\pi}{4}) - i \sin(\frac{2\pi}{4})) \right)$$

$$= \frac{2\pi i}{4} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -i\frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} - i \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{i\pi\sqrt{2}}{4}$$

Juntamos la parte real e imaginaria, y se obtiene (en ambos casos) el mismo resultado:

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}} \rightarrow \text{Llegamos al mismo resultado...}$$