MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Juvenal Letelier.
Auxiliar: Roberto Gajardo Pizarro.

Auxiliar 10: Integración compleja (parte 2).

27 de Mayo de 2019

P1. Usando la fórmula integral de Cauchy, demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx = \frac{\pi}{8a^3} \quad ; \quad a > 0$$

P2. Evalúe la integral:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^2(z-3)}$$

Donde Γ es la circunferencia de radio 2 centrada en el origen en el plano complejo.

P3. Demuestre que:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$$

P4. Encuentre la expansión en series de Laurent de la función:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

En el disco $0 < |z-1| < 1$.

P5. Evalúe los tipos de singulardiad de la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$$

en los dominios:

i) $0 < |z-1| < |$
ii) $0 < |z+1| < 1$

Luego, calcule los residuos usando, por separado, una expansión en series de Laurent y la definición de residuo. Finalmente calcule

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz$$

con Γ una curva tipo Jordan que encierra ambas singularidades.

P6. Calcule la siguiente integral usando Teorema de Residuos:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$