



Podríamos calcular con fuerza bruta el laplaciano de la función, luego encontrar la función conjugada armónica de $u(x,y)$ y luego escribir $f(z)$, sin embargo, si encontramos $v(x,y)$ tal que $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ y se cumple Cauchy-Riemann, entonces $f(z)$ es una función regular, lo que equivale a decir que $v(x,y)$, y en particular $u(x,y)$, son funciones armónicas.

En resumen, encontrar $v(x,y)$ tal que satisfaga Cauchy-Riemann es suficiente para terminar todo el ejercicio.

Las condiciones de Cauchy-Riemann son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Tenemos $u(x,y) = e^{-x} (x \cdot \sin(y) - y \cdot \cos(y))$, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-x} \sin(y) - x e^{-x} \sin(y) + e^{-x} y \cos(y) \quad (i)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = x e^{-x} \cos(y) - e^{-x} \cos(y) + e^{-x} y \sin(y) \quad (ii)$$

Integrando (i)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-x} \sin(y) - x e^{-x} \sin(y) + e^{-x} y \cos(y) \quad \int dy$$

Muy importante!

$$\Rightarrow v(x,y) = e^{-x} \int \sin(y) dy - x e^{-x} \int \sin(y) dy + e^{-x} \int y \cos(y) dy + C(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = -e^{-x} \cos(y) + x e^{-x} \cos(y) + e^{-x} \int y \cos(y) dy \quad \left| \begin{array}{l} u=y \Rightarrow du=dy \\ dv=\cos(y)dy \Rightarrow v=\sin(y) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow v(x,y) = -e^{-x} \cos(y) + x e^{-x} \cos(y) + e^{-x} \left(y \sin(y) - \int \sin(y) dy \right) + C(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = -e^{-x} \cos(y) + x e^{-x} \cos(y) + e^{-x} y \sin(y) + e^{-x} \cos(y) + C(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = x e^{-x} \cos(y) + e^{-x} y \sin(y) + C(x)$$

Ahora derivamos con respecto a x e igualamos a la expresión para $\frac{\partial v}{\partial x}$ que puede encontrarse en (ii):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x} \cos(y) - x e^{-x} \cos(y) - e^{-x} y \sin(y) + \frac{dC}{dx} \quad \text{Igualando a (ii)}$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{-x} \cos(y)} - \cancel{x e^{-x} \cos(y)} - \cancel{e^{-x} y \sin(y)} + \frac{dC}{dx} = -\cancel{x e^{-x} \cos(y)} + \cancel{e^{-x} \cos(y)} - \cancel{e^{-x} y \sin(y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow C(x) = C ; \text{ con } C \in \mathbb{R} \text{ constante!}$$

Como es sólo una constante que no depende ni de x ni de y , podemos escogerla cero, entonces:

$$\Rightarrow \boxed{v(x,y) = x e^{-x} \cos(y) + e^{-x} y \sin(y)} \rightarrow \text{Función Armónica conjugada de } u(x,y)$$

Entonces existe una función $f(z)$ tal que $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$. Como u y v cumplen Cauchy-Riemann, entonces f es regular y, por lo tanto, u y v son funciones armónicas.

Ahora, para encontrar $f(z)$ en función de $z = x + iy$, debemos trabajar la expresión:

$$f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y) \Rightarrow f(x,y) = (x e^{-x} \sin(y) - e^{-x} y \cos(y)) + i (x e^{-x} \cos(y) + e^{-x} y \sin(y))$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x e^{-x} \sin(y) - e^{-x} y \cos(y) + i x e^{-x} \cos(y) + i e^{-x} y \sin(y)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x e^{-x} (\sin(y) + i \cos(y)) - y e^{-x} (\cos(y) - i \sin(y))$$

$$\Rightarrow f(x,y) = i x e^{-x} (\cos(y) - i \sin(y)) - y e^{-x} (\cos(y) - i \sin(y))$$

$$\Rightarrow f(x,y) = e^{-x} (ix - y) (\cos(y) - i \sin(y)) = i e^{-x} (x + iy) (\cos(y) - i \sin(y))$$

$$\text{Usamos que } e^{ik} = \cos(k) + i \sin(k)$$

$$\Rightarrow f(x+iy) = i(x+iy) e^{-x} e^{-iy} = i(x+iy) e^{-(x+iy)} \quad / \quad z = x+iy$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = iz e^{-z}} \rightarrow \text{Función } f(z)$$

P2 (a) Tenemos la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n \quad \text{-----} \rightarrow \text{Identificamos } a_n = \frac{n!}{n^n}$$

Problemas con el criterio del cociente:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \boxed{R = e} \rightarrow \text{Radio de convergencia...}$$

(b) Tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3+(-1)^n)^n z^n \quad \text{-----} \rightarrow \text{Identificamos } a_n = (3+(-1)^n)^n$$

Como es una potencia de n , nos conviene usar el criterio de la raíz n -ésima:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(3+(-1)^n)^n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} (3+(-1)^n)$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, la sucesión $3+(-1)^n$ oscila entre 2 y 4, entonces, como debemos escoger el mayor:

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} (3+(-1)^n) = 4 \Rightarrow \frac{1}{R} = 4 \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{4}} \rightarrow \text{Radio de convergencia...}$$

(c) Tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n \longrightarrow \text{Identificamos } C_n = n+a^n$$

Podemos usar criterio del cociente o de la raíz, pero nos llevaría a límites que no son tan fáciles de calcular. El truco en este caso está en separar la serie en dos series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$$

(i) (ii)

Para la serie (i) tenemos $C_n = n$:

$$\frac{1}{R_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \frac{1}{R_i} = 1 \Rightarrow \boxed{R_i = 1}$$

↳ Radio de convergencia de (i)

Para la serie (ii) tenemos $C_n = a^n$:

$$\frac{1}{R_{ii}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \Rightarrow \frac{1}{R_{ii}} = a \Rightarrow \boxed{R_{ii} = \frac{1}{a}}$$

↳ Radio de convergencia de (ii)

Para asegurar la convergencia de nuestra serie original necesitamos escoger R tal que $R = \min \{R_i, R_{ii}\}$. Como tenemos $a > 1$ entonces $\frac{1}{a} < 1$, así:

$$R = \min \{R_i, R_{ii}\} = \min \left\{1, \frac{1}{a}\right\} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{a}} \longrightarrow \text{Radio de convergencia de la serie...}$$

Usamos el criterio de convergencia de la raíz n-ésima para calcular el radio de convergencia, ya que notamos que C_k está definida a trozos:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = \max \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1}, \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a+1|} \right\}$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{b} = 1$; $b > 0$, y $|a+1| > 0$, entonces:

$$\Rightarrow \max \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{1}, \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a+1|} \right\} = \max \{1, 1\} = 1$$

$$\Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|C_k|} = 1 \Rightarrow \frac{1}{R} = 1 \Rightarrow \boxed{R=1} \rightarrow \text{Radio de convergencia buscado...}$$

Ahora, para encontrar el valor de la serie separamos entre par e impar:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k = \sum_{k \text{ par}} C_k z^k + \sum_{k \text{ impar}} C_k z^k = \sum_{k \text{ par}} (a+1) z^k + \sum_{k \text{ impar}} 1 \cdot z^k$$

Un número par puede representarse por $k=2n$, mientras que un número impar puede representarse por $k=2n+1$, entonces:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k = (a+1) \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{(2n+1)}$$

Tomando la suma parcial hasta j , y luego haciendo $j \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k = (a+1) \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j z^{2n} + \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j z^{(2n+1)}$$

$$= (a+1) \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j z^{2n} + z \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j z^{2n} = (a+1+z) \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^j (z^2)^n$$

$$= (a+1+z) \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - z^{2j+2}}{1 - z^2} \right) \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k = \frac{a+1+z}{1-z^2}}$$

$$|z| < 1$$