

P1 Por definición, si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es la parametrización de un camino en los números complejos y f una función compleja, entonces la integral de f sobre γ es:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt}(t) dt \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{l} \text{Recordar integrales} \\ \text{de plúje} \end{array} \right)$$

(c) En este caso la curva γ corresponde a dos rectas, las cuales separamos, es decir:

$$\int_{\gamma} z^* dz = \int_{\gamma_1} z^* dz + \int_{\gamma_2} z^* dz$$

Donde γ_1 es la línea que conecta 0 y $2i$, parametrizada como $\gamma_1(t) = it$, con $t \in [0, 2]$, entonces, $d\gamma_1 = i dt$. Ahora, $f(z) = z^*$, entonces, $f(\gamma_1(t)) = (it)^* = -it$. Junzando todo:

$$\int_{\gamma_1} z^* dz = \int_0^2 f(\gamma_1(t)) \cdot i dt = \int_0^2 -it \cdot i dt = \int_0^2 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 = 2$$

Ahora, γ_2 es la línea recta que conecta $2i$ y $4+2i$. En este caso $\gamma_2(t) = t + 2i$; $t \in [0, 4]$, entonces, $d\gamma_2 = dt$. Ahora, $f(\gamma_2(t)) = (t+2i)^* = t-2i$. Junzando todo:

$$\int_{\gamma_2} z^* dz = \int_0^4 f(\gamma_2(t)) dt = \int_0^4 (t-2i) dt = \int_0^4 t dt - 2i \int_0^4 1 dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 - 2i \cdot 4 = 8 - 8i$$

Así:

$$\int_{\gamma} z^* dz = \int_{\gamma_1} z^* dz + \int_{\gamma_2} z^* dz = 2 + 8 - 8i \Rightarrow \boxed{\int_{\gamma} z^* dz = 10 - 8i}$$

①

(b) Nos dan una parametrización para $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) = e^{it} ; t \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow d\gamma = ie^{it} dt$$

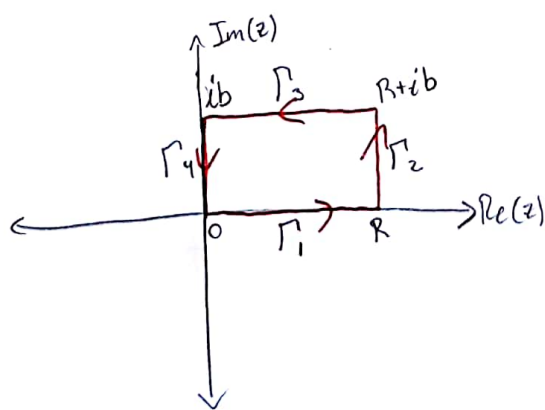
Ahora, $f(\gamma(t)) = \frac{1}{e^{2it}}$, entonces:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} = \int_{\pi}^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{2it}} = \int_{\pi}^{2\pi} ie^{-it} dt$$

$$= i \cdot \frac{1}{-i} \cdot e^{-it} \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(e^{-2\pi i} - e^{-\pi i}) = -(1 - (-1)) = -(1+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} = -2}$$

P2 (a) Notamos que los límites de la integral que nos dan son 0 e ∞ , entonces, integramos la función compleja que nos dan en un rectángulo tal que $\operatorname{Re}(z) \in [0, R]$ (luego haremos $R \rightarrow \infty$), e $\operatorname{Im}(z) \in [0, b]$ (constante en la integral).



Sabemos que:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_3} f(z) dz + \int_{\Gamma_4} f(z) dz$$

Donde $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ y Γ es el rectángulo dibujado.

(i) Γ_1 : Tendremos una recta real, $\gamma_1(t) = t$; $t \in [0, R]$ y $dr_1 = dt$. Además $f(\gamma_1(t)) = \frac{1}{1+t^2}$, Así:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_0^R \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(R) - \cancel{\arctan(0)} = \arctan(R)$$

(ii) Γ_2 : Tendremos una recta tal que $\gamma_2(t) = R+it$, $t \in [0, b]$, entonces, $dr_2 = i dt$, Además, $f(\gamma_2(t)) = \frac{1}{1+(R+it)^2}$, Así:

$$\int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_0^b \frac{i dt}{1+(R+it)^2} = i \int_0^b \frac{dt}{1+(R+it)^2}$$

(iii) Γ_3 : Tendremos la recta $\gamma_3(t) = t+ib$, donde $t \in [0, R]$ pero va de R a 0 . Tendremos $dr_3 = dt$ y $f(\gamma_3(t)) = \frac{1}{1+(t+ib)^2}$, Así:

$$\int_{\Gamma_3} f(z) dz = \int_R^0 \frac{dt}{1+(t+ib)^2} = - \int_0^R \frac{dt}{1+(t+ib)^2}$$

(iv) Γ_4 : Tendremos la recta $\gamma_4(t) = it$, $t \in [0, b]$ pero de forma análoga a γ_3 , t va desde b a 0 . Tendremos $dr_4 = i dt$ y $f(\gamma_4(t)) = \frac{1}{1-t^2}$, Así:

$$\int_{\Gamma_4} f(z) dz = \int_b^0 \frac{i dt}{1-t^2} = -i \int_0^b \frac{dt}{1-t^2} = -i \int_0^b \frac{dt}{(1-t)(1+t)}$$

Usamos fracciones parciales:

$$\frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} \Rightarrow \frac{A+At+B-Bt}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} \Rightarrow \begin{aligned} A+B &= 1 \\ A-B &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$\int_{\Gamma_4} f(z) dz = -\frac{i}{2} \left(\int_0^b \frac{dt}{1-t} + \int_0^b \frac{dt}{1+t} \right) = -\frac{i}{2} \left(-\ln(1-t) + \ln(1+t) \right) \Big|_0^b$$

Como $b \in (-1, 1)$, entonces $|1-t| = 1-t$ y $|1+t| = 1+t \quad \forall b \in (-1, 1)$, entonces:

$$\int_{\Gamma_4} f(z) dz = -\frac{i}{2} (\ln(1+t) - \ln(1-t)) \Rightarrow \int_{\Gamma_4} f(z) dz = -\frac{i}{2} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

Ahora, juntando todo:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \arctan(R) + i \int_0^b \frac{dt}{1+(R+it)^2} - \int_0^R \frac{dt}{1+(t+ib)^2} - \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

Notemos que $f(z)$ es regular en $\text{Int}(\Gamma)$, ya que:

$$f(z) = \frac{1}{1+(x+iy)^2} = \frac{1}{1+x^2-y^2+2xyi}$$

Si $(x,y) = (0,0)$ entonces $f(z) = 1$. Si $(x,y) = (0,y)$ entonces $f(z) = \frac{1}{1-y^2}$ y se podría indefinir para $y = -1$ o $y = 1$, sin embargo, $b \in (-1, 1)$, es decir, en el rectángulo Γ no se indefinirá de esta forma. Para $(x,y) = (x,0)$ tendremos $f(z) = \frac{1}{1+x^2}$, la cual no se indefine. Entonces, $f(z)$ es holomorfa en $\text{Int}(\Gamma) + \Gamma$, por lo tanto aplica el teorema de Cauchy-Goursat, es decir:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

Entonces:

$$\Rightarrow \arctan(R) + i \int_0^b \frac{dt}{1+(R+it)^2} - \int_0^R \frac{dt}{1+(t+ib)^2} - \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = 0$$

Nos piden calcular cierta integral de 0 a ∞ , con la cual debemos tomar $R \rightarrow \infty$. Para este tipo de ejercicios, aquellas integrales que nos presentarán dificultades son aquellas donde R esté en el integrando, en este caso, la segunda integral:

$$i \int_0^b \frac{dt}{1+(R+it)^2} \quad \text{--- -- --} \rightarrow \text{En general esta integral será nula para } R \rightarrow \infty, \text{ sin embargo hay que demostrarlo, YA que no es trivial...}$$

Para demostrar que converge, vamos a acotar:

$$\left| i \int_0^b \frac{dt}{1+(R+it)^2} \right| = \left| \int_0^b \frac{dt}{1+(R+it)^2} \right| \leq \int_0^b \left| \frac{dt}{1+(R+it)^2} \right| = \int_0^b \frac{dt}{|1+(R+it)^2|}$$

Desarrollemos el denominador:

$$1+(R+it)^2 = 1+R^2+2iRt-t^2 = (1+R^2-t^2)+2Rti$$

$$\Rightarrow |1+(R+it)^2| = \sqrt{(1+R^2-t^2)^2 + 4R^2t^2} \stackrel{(*)}{\geq} \sqrt{(1+R^2-t^2)^2} = 1+R^2-t^2$$

Entonces:

$$\left| i \int_0^b \frac{dt}{1+(R+it)^2} \right| \leq \int_0^b \frac{dt}{\sqrt{1+R^2-t^2+4R^2t^2}} \stackrel{(*)}{\leq} \int_0^b \frac{dt}{1-t^2+R^2}$$

Como $t \in [0, b]$ y $b \in (-1, 1)$, entonces $1-t^2+R^2 \geq R^2$, entonces, $\frac{1}{1-t^2+R^2} \leq \frac{1}{R^2}$

$$\Rightarrow \left| i \int_0^b \frac{dt}{1+(R+it)^2} \right| \leq \int_0^b \frac{dt}{R^2} = \frac{b}{R^2} \quad \Bigg/ \quad \begin{matrix} R \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \frac{b}{R^2} \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^b \frac{dt}{1+(R+it)^2} = 0$$

Aplicando límite $R \rightarrow \infty$ a los demás términos tendremos:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{erctan}(R) - \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+(t+ib)^2} - \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+(t+ib)^2} - \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = 0$$

Vemos que aparece el $\frac{\pi}{2}$ y una integral hacia infinito. Desarrollemos el integrando:

$$\frac{1}{1+(t+ib)^2} = \frac{1}{1+t^2-b^2+2tbi} = \frac{1+t^2-b^2-2tbi}{(1+t^2-b^2)^2+4t^2b^2}$$

Entonces:

$$\int_0^{\infty} \frac{(1+t^2-b^2-2tbi)}{(1+t^2-b^2)^2+4t^2b^2} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

Finalmente, tomamos la parte real a cada lado de la igualdad:

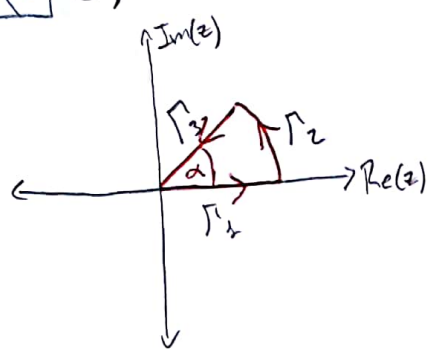
$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} \frac{1+t^2-b^2}{(1+t^2-b^2)^2+4t^2b^2} dt = \frac{\pi}{2}} //$$

(b) Ahora tomamos la parte imaginaria:

$$-2bi \int_0^{\infty} \frac{t}{(1+t^2-b^2)^2+4t^2b^2} dt = -\frac{i}{2} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty} \frac{t}{(1+t^2-b^2)^2+4t^2b^2} dt = \frac{1}{4b} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)} //$$

P3 (e)



Usando el hint, el sector circular es una superficie cuyo contorno nombraremos Γ . Esta curva Γ es cerrada y simple y, como $f(z)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, entonces se cumple el teorema de Cauchy-Goursat, es decir:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

Veamos la parametrización de Γ_1 , Γ_2 y Γ_3 :

(i) Γ_1 : Tendremos una recta sobre el eje real, es decir, $r_1(t) = t$; $t \in [0, R]$, entonces $dr_1 = dt$ y $f(r_1(t)) = f(t)$, así:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_0^R f(t) dt$$

(ii) Γ_2 : Tendremos un arco de circunferencia. En el plano complejo esto se parametriza como $r_2(t) = R \cdot e^{it}$, con $t \in [0, \alpha]$. Tendremos $dr_2 = iR e^{it} dt$ y además $f(r_2(t)) = f(R e^{it})$, así:

$$\int_{\Gamma_2} f(z) dz = \int_0^{\alpha} f(R e^{it}) \cdot iR e^{it} dt = iR \int_0^{\alpha} f(R e^{it}) e^{it} dt$$

Donde notamos que aparece algo similar a nuestra hipótesis del enunciado.

(iii) Γ_3 : Tendremos una recta tal que todas las números en ella tienen ángulo α , con lo cual sólo varía el radio, entonces, $r_3(t) = t e^{i\alpha}$, $t \in [0, R]$ (pero se recorre de R a 0). Tendremos $dr_3 = e^{i\alpha} dt$ y $f(r_3(t)) = f(t e^{i\alpha})$, entonces:

$$\int_{\Gamma_3} f(z) dz = \int_R^0 f(t e^{i\alpha}) e^{i\alpha} dt = - \int_0^R f(t e^{i\alpha}) e^{i\alpha} dt$$

Entonces, juntando todo, tendremos que:

$$\int_0^R f(t) dt + iR \int_0^{\alpha} f(Re^{it}) e^{it} dt - \int_0^R f(te^{i\alpha}) e^{i\alpha} dt = 0$$

Al tomar límite $R \rightarrow \infty$ la segunda integral no dará problemas. Desarrollamos:

$$\left| iR \int_0^{\alpha} f(Re^{it}) e^{it} dt \right| = R \cdot \left| \int_0^{\alpha} f(Re^{it}) e^{it} dt \right| \leq R \cdot \int_0^{\alpha} |f(Re^{it}) e^{it}| dt = R \int_0^{\alpha} |f(Re^{it})| \cdot |e^{it}| dt$$

$$|e^{it}| = 1 ; \forall t$$

$$\Rightarrow \left| iR \int_0^{\alpha} f(Re^{it}) e^{it} dt \right| \leq R \cdot \int_0^{\alpha} |f(Re^{it})| dt \quad \Bigg/ \quad \lim_{R \rightarrow \infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \left| iR \int_0^{\alpha} f(Re^{it}) e^{it} dt \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^{\alpha} |f(Re^{it})| dt = 0 \quad \rightarrow \text{Enunciado}$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} iR \int_0^{\alpha} f(Re^{it}) e^{it} dt = 0$$

Aplicando límite a los demás términos tendremos:

$$\int_0^{\infty} f(t) dt - \int_0^{\infty} f(te^{i\alpha}) e^{i\alpha} dt = 0 \Rightarrow \boxed{e^{i\alpha} \int_0^{\infty} f(te^{i\alpha}) dt = \int_0^{\infty} f(t) dt}$$

(b) Para verificar esto necesitamos que se verifique la hipótesis, es decir:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^{\alpha} |f(Re^{it})| dt = 0; \text{ con } f(z) = e^{-z^2} \text{ y } \alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$$

Desarrollamos:

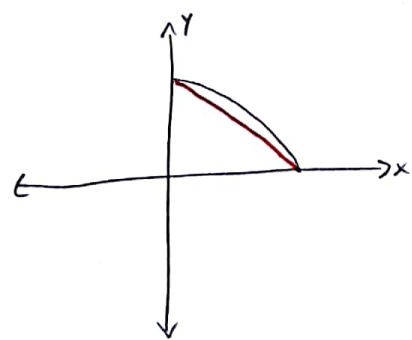
$$f(Re^{it}) = e^{-(Re^{it})^2} = \exp(-(R^2 e^{2it})) = \exp(-R^2(\cos(2t) + i\sin(2t)))$$

$$\Rightarrow f(Re^{it}) = e^{-R^2 \cos(2t)} \cdot e^{-R^2 i \sin(2t)} \Rightarrow |f(Re^{it})| = e^{-R^2 \cos(2t)}$$

Entonces:

$$\left| R \int_0^{\alpha} e^{-(Re^{it})^2} dt \right| \leq R \int_0^{\alpha} |e^{-(Re^{it})^2}| dt = R \int_0^{\alpha} e^{-R^2 \cos(2t)} dt$$

Ahora, recordemos que, para $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq -\frac{2x}{\pi} + 1$, lo cual puede notarse en el gráfico:



En particular, sea $x = 2t$, $\Rightarrow t = \frac{x}{2}$, es decir, para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\cos(2t) \geq -\frac{4t}{\pi} + 1$, entonces

$$-\cos(2t) \leq \frac{4t}{\pi} - 1$$

$$\Rightarrow e^{-R^2 \cos(2t)} \leq e^{-R^2(-\frac{4t}{\pi} + 1)}$$

Entonces:

$$\left| R \int_0^{\alpha} e^{-(Re^{it})^2} dt \right| \leq R \int_0^{\alpha} e^{-R^2 \cos(2t)} dt \leq R \int_0^{\alpha} e^{-R^2(-\frac{4t}{\pi} + 1)} dt = R \cdot e^{-R^2} \int_0^{\alpha} e^{\frac{4R^2}{\pi} t} dt$$

$$\Rightarrow \left| R \int_0^\alpha e^{-(Re^{it})^2} dt \right| \leq R e^{-R^2} \cdot \frac{\pi}{4R^2} \left(e^{\frac{4R^2\alpha}{\pi}} \right) \Big|_0^\alpha = \underbrace{\frac{\pi e^{-R^2}}{4R}}_{(*)} (e^{\frac{4R^2\alpha}{\pi}} - 1)$$

Tomando límite a (*):

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (*) = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{4R^2\alpha}{\pi} - R^2}}{R} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-R^2}}{R} \right) = \frac{\pi}{4} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-R^2(1 - \frac{4\alpha}{\pi})}}{R}$$

Para que converja se necesita $1 - \frac{4\alpha}{\pi} \geq 0$, es decir, $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$, lo cual es cierto ya que nos dicen que $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, entonces, al tomar límite $R \rightarrow \infty$ se tiene que:

$$R \int_0^\alpha e^{-(Re^{it})^2} dt = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Se cumple lo de la parte b) para } f(z) = e^{-z^2}}$$

P4 LA Fórmula integral de Cauchy nos dice que si Γ es una curva cerrada, f es una función holomorfa y z_0 es un punto en $\text{Int}(\Gamma)$, entonces:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz} \quad \text{ó} \quad \boxed{\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)}$$

En nuestro caso tenemos:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz; \text{ con } \Gamma \text{ circunferencia de radio 3 y centro 0 (curva cerrada).}$$

Tenemos que llevar el integrando a una forma como la de la integral de Cauchy, para lo cual usamos fracciones parciales:

$$\frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{Az - 2A + Bz - B}{(z-1)(z-2)}$$

$$\Rightarrow A + B = 0$$

$$\left. \begin{aligned} -2A - B &= \sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -\sin(\pi z^2) - \cos(\pi z^2) \\ B &= \sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = \underbrace{\oint_{\Gamma} \frac{-(\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2))}{z-1} dz}_{(i)} + \underbrace{\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz}_{(ii)}$$

(i) Identificamos $f(z) = -(\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2))$ y $z_0 = 1$. Notamos que $z_0 \in \text{Int}(\Gamma)$ ya que Γ es una circunferencia de radio 3, entonces se cumple Cauchy:

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \frac{-(\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2))}{z-1} dz = 2\pi i \cdot (-\sin(\pi) - \cos(\pi)) = 2\pi i$$

(ii) Identificamos $f(z) = \sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$ y $z_0 = 2$, con lo cual $z_0 \in \text{Int}(\Gamma)$, entonces:

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz = 2\pi i (\sin(4\pi) + \cos(4\pi)) = 2\pi i$$

Finalmente, juntando los resultados:

$$\Rightarrow \boxed{\oint_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = 4\pi i} //$$