MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Juvenal Letelier.
Auxiliar: Roberto Gajardo Pizarro.

Auxiliar 9: Integración compleja.

13 de Mayo de 2019

P1. a) Calcule $\int_\gamma z^* dz$ para la curva γ correspondiente a la línea poligonal que conecta 0 con $2i$ y $2i$ con $4+2i$.

b) Calcule $\int_\gamma \frac{1}{z^2} dz$ para $\gamma(t) = e^{it}$; $t \in [\pi, 2\pi]$.

P2. a) Pruebe que, para $b \in (-1, 1)$:

$$\int_0^\infty \frac{1 - b^2 + x^2}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

b) Muestre que si $b \neq 0$ entonces:

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2x^2} dx = \frac{1}{4b} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

Hint: Use la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ adecuadamente.

P3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa:

a) Dado $\alpha \in (0, 2\pi)$, pruebe que si

$$\lim_{R\to\infty} R \int_0^\alpha |f(Re^{i\theta})| d\theta = 0$$

entonces se tiene que

$$e^{i\alpha} \int_0^\infty f(e^{i\alpha}x) dx = \int_0^\infty f(x) dx$$

Hint: Considere el sector circular de ángulo α.

b) Pruebe que la función $f(z) = e^{-z^2}$ satisface la condición anterior para $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$.

P4. Usando la fórmula integral de Cauchy apropiadamente, calcule:

$$\int_\Gamma \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}$$

Donde Γ es la circunferencia de radio 3 y centro 0 en el plano complejo.