

*Tarea Auxiliar 6 "Cálculo Avanzado y Aplicaciones"

PI Tenemas un campo en coordenadas cilíndricas, y nos piden la divergencia y el rotor. En coordenadas ortogonales generalizadas:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial (F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial (F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial (F_w h_u h_v)}{\partial w} \right]$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_v & F_v h_u & F_w h_u \end{vmatrix}$$

Donde, si $\vec{r}$ es la parametrización de un punto del espacio en esas coordenadas, entonces:

$$h_u = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\| ; h_v = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| ; h_w = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\| \quad \longrightarrow \text{Factores de escala...}$$

Para el caso de las coordenadas cilíndricas, se tiene:

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = \rho \cos(\theta) \hat{i} + \rho \sin(\theta) \hat{j} + z \hat{k}$$

Entonces, se tiene que:

$$h_\rho = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right\| = \left\| \cos(\theta) \hat{i} + \sin(\theta) \hat{j} \right\| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \Rightarrow \boxed{h_\rho = 1}$$

$$h_\theta = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = \left\| -\rho \sin(\theta) \hat{i} + \rho \cos(\theta) \hat{j} \right\| = \sqrt{\rho^2 \sin^2(\theta) + \rho^2 \cos^2(\theta)} = \sqrt{\rho^2} \Rightarrow \boxed{h_\theta = \rho}$$

$$h_z = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right\| = \left\| \hat{k} \right\| = \sqrt{1^2} \Rightarrow \boxed{h_z = 1}$$

Enonces, para el campo $\vec{G}$, tendrías que:

$$\nabla \cdot \vec{G} = \frac{1}{\rho} \cdot \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \rho \right)}_{D_1} + \frac{\partial}{\partial \theta} (0) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \rho \right)}_{D_2} \right]$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) = z \cdot \left(\frac{2\rho(\rho^2 + z^2)^{3/2} - \rho^2 \cdot \frac{3}{2}(\rho^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2\rho}{(\rho^2 + z^2)^3} \right)$$

$$D_2 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-\rho^3}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) = -\rho^3 \cdot \left(\frac{-\frac{3}{2}(\rho^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2z}{(\rho^2 + z^2)^3} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{G} = \frac{1}{\rho} \cdot \left[\frac{2\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3\rho^3 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3\rho^3 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{G} = \frac{2z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}} \rightarrow \text{Divergencia de } \vec{G}$$

$$\nabla \times \vec{G} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} & 0 & \frac{-\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{-\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (0) \right) \hat{\rho} - \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{-\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right) \hat{\theta} + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (0) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{G} = - \left(- \left(\frac{2\rho(\rho^2 + z^2)^{3/2} - \rho^2 \cdot \frac{3}{2}(\rho^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2\rho}{(\rho^2 + z^2)^3} \right) - \rho \left(\frac{(\rho^2 + z^2)^{3/2} - z \cdot \frac{3}{2}(\rho^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2z}{(\rho^2 + z^2)^3} \right) \right) \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{G} = \left(\frac{2\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3\rho^3}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} + \frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3\rho z^2}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} \right) \rho \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{G} = \left(\frac{3\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3\rho(\rho^2+z^2)}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} \right) \rho \hat{\theta} = \left(\frac{3\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} \right) \rho \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{G} = \vec{0}} \rightarrow \text{Rotor de } \vec{G}.$$

P2 Por definición el Área de la superficie D es:

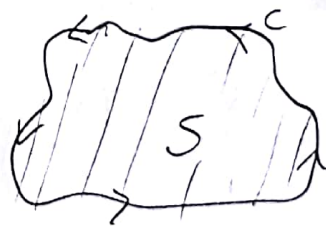
$$A(D) = \iint_D dD = \iint_D 1 dD$$

Según el Teorema de Green, si C es una curva con una parametrización tal que la recorre en sentido Anti-horario, y $\vec{F}(x,y)$ un campo Vectorial escrito de la forma:

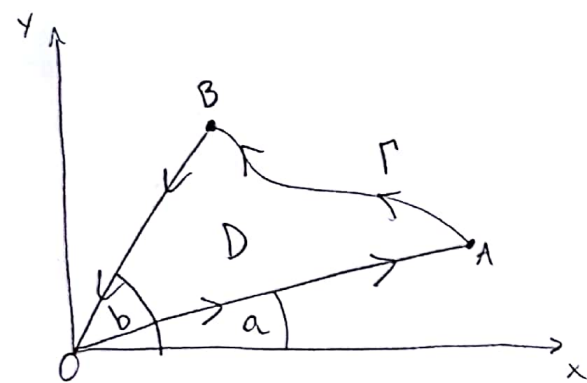
$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{x} + Q(x,y)\hat{y}$$

Se tiene que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



En particular, si encontramos Q y P tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, entonces la integral de línea del campo $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{x} + Q(x,y)\hat{y}$ a través de un camino cerrado es equivalente al Área de la superficie encerrada por C.



En particular para este caso tendremos que $C = \overline{OA} \cup \Gamma \cup \overline{BO}$, que es una curva cerrada, simple, y regular a trozos. Para la elección de P y Q podemos tomar $P(x,y) = \frac{-y}{2}$, y $Q(x,y) = \frac{x}{2}$, de esa forma se cumple:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Entonces, sea $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{2} \hat{x} + \frac{x}{2} \hat{y}$, tendremos que:

$$A(D) = \oint_C \left(\frac{-y}{2} \hat{x} + \frac{x}{2} \hat{y} \right) d\vec{r}$$

$$\Rightarrow A(D) = \int_{\overline{OA}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \int_{\overline{BO}} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3$$

Partamos por la primera integral. En este caso tenemos que $y = m_a x$, entonces, podemos parametrizar la recta como:

$$\vec{r}_1 = (x, m_a x) ; x \in [0, x_A]$$

Donde x_A es la coordenada x del punto A . Notamos que $d\vec{r}_1 = (1, m_a) dx$, y, el campo $\vec{F}$ evaluado en la parametrización es:

$$\vec{F}(x) = \frac{-m_a x}{2} \hat{x} + \frac{x}{2} \hat{y} = \left(-\frac{m_a x}{2}, \frac{x}{2} \right)$$

Entonces, tendremos que:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \left(-\frac{m_0 x}{2}, \frac{x}{2}\right) \cdot (1, m_0) = -\frac{m_0 x}{2} + \frac{m_0 x}{2} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\int_{a_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = 0 \right]$$

De manera análoga se puede mostrar que para la recta $y = m_0 x$ esto también se cumple, es decir:

$$\left[\int_{b_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3 = 0 \right]$$

Por lo tanto, sólo nos queda la integral asociada a Γ . La parametrización es dada en el enunciado:

$$\vec{r}_2(\theta) = (f(\theta) \cos(\theta), f(\theta) \sin(\theta)); \theta \in [a, b]$$

$$\Rightarrow d\vec{r}_2 = (f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta), f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)) d\theta$$

Evaluando $\vec{F}$ en la parametrización:

$$\vec{F}(\theta) = -\frac{f(\theta) \sin(\theta)}{2} \hat{x} + \frac{f(\theta) \cos(\theta)}{2} \hat{y} \Rightarrow \vec{F}(\theta) = \frac{1}{2} (-f(\theta) \sin(\theta), f(\theta) \cos(\theta))$$

Entonces:

$$\vec{F}(\theta) \cdot d\vec{r}_2 = \frac{1}{2} f(\theta) (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \cdot (f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta), f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta)) d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\theta) \cdot d\vec{r}_2 = \frac{1}{2} f(\theta) (-f'(\theta) \cos(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \sin^2(\theta) + f'(\theta) \cos(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos^2(\theta)) d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\theta) \cdot d\vec{r}_2 = \frac{1}{2} f(\theta) f(\theta) (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \Rightarrow \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = \frac{1}{2} (f(\theta))^2 \Big|_a^b$$

⑤

Entonces, como las integrales asociadas a las rectas son cero, se concluye finalmente que:

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_a^b (f(\theta))^2 d\theta \rightarrow \text{Área encerrada...}$$

P3) (c) Aplicando directamente la definición de rotor:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y^2z + 5y^3 & 2x^3yz + 15xy^2 - 7z & x^3y^2 - 7y + 4z^3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = ((\cancel{2x^3y} - 7) - (\cancel{2x^3y} - 7))\hat{x} - ((\cancel{3x^2y^2} - (3x^2y^2))\hat{y} + ((\cancel{6x^2yz} + 15y^2) - (\cancel{6x^2yz} + 15y^2))\hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{F} = \vec{0}} \rightarrow \text{Rotor de } \vec{F}$$

Ahora, normalmente $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ es una condición necesaria, pero NO suficiente, PARA concluir que $\vec{F}$ es conservativo, es decir, $\vec{F}$ conservativo $\Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, pero no necesariamente al revés. Los casos en que se cumple que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}$ conservativo son los casos donde $\vec{F}$ y $\nabla \times \vec{F}$ están bien definidas en el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$, es decir, donde ni $\vec{F}$ ni $\nabla \times \vec{F}$ se indefinen. En particular, dominios como $\mathbb{R}^3$ (llamadas "estrellados", o que no tienen agujeros) son dominios donde se puede asegurar que $\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}$ es conservativo. Entonces, se tiene que $\vec{F}$ es conservativo.

Para encontrar el potencial tal que $\vec{F} = -\nabla f$, necesitamos que:

$$(i) -\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2z + 5y^3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2y^2z - 5y^3$$

$$(ii) -\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz + 15xy^2 - 7z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^3yz - 15xy^2 + 7z$$

$$(iii) -\frac{\partial f}{\partial z} = x^3y^2 - 7y + 4z^3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = -x^3y^2 + 7y - 4z^3$$

Podemos integrar directamente cada una de las ecuaciones, pero recordando la constante de integración (que a priori depende de las otras dos variables). Partiendo con (i):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2y^2z - 5y^3 \int dx \Rightarrow f(x,y,z) = -\frac{3x^3}{3}y^2z - 5y^3x + C_1(y,z)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = -x^3y^2z - 5y^3x + C_1(y,z)$$

Derivamos la expresión de f que obtenimos con respecto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-x^3y^2z - 5y^3x + C_1(y,z)) = -2x^3yz - 15y^2x + \frac{\partial C_1}{\partial y}$$

Iguando a la expresión en (ii):

$$\Rightarrow \cancel{-2x^3yz} - \cancel{15y^2x} + \frac{\partial C_1}{\partial y} = \cancel{-2x^3yz} - \cancel{15xy^2} + 7z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_1}{\partial y} = 7z \int dy \Rightarrow C_1(y,z) = 7zy + C_2(z)$$

Entonces, $f(x,y,z) = -x^3y^2z - 5y^3x + 7zy + C_2(z)$. Derivando con respecto a z :

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = -x^3 y^2 + 7y + \frac{dG}{dz}$$

Iguando a la expresión en (iii):

$$\Rightarrow -x^3 y^2 + 7y - 4z^3 = -x^3 y^2 + 7y + \frac{dG}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{dG}{dz} = -4z^3 \Rightarrow G(z) = -4 \frac{z^4}{4} + C \Rightarrow G(z) = -z^4 + C$$

Entonces, escogiendo $C=0$, se tiene que:

$$\boxed{f(x, y, z) = -x^3 y^2 z - 5y^3 x + 7yz - z^4} \rightarrow \text{Potencial Asociado Al campo } \vec{F}$$

(b) Tenemos la curva C parametrizada por

$$\vec{\gamma}(t) = (\sin^4(t), e^{2(\pi-t)t} \cos^5(t), \sqrt{1+t^2} \sin(t)); t \in [0, \pi]$$

Sabemos que, Al ser un campo conservativo, entonces:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{x} = f(A) - f(B)$$

Donde f es el campo escalar (potencial) asociado tal que $\vec{F} = -\nabla f$.

Notemos que $\vec{\gamma}(0) = (0, 1, 0)$ y $\vec{\gamma}(\pi) = (0, -1, 0)$, entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{\gamma}(0)}^{\vec{\gamma}(\pi)} \vec{F} \cdot d\vec{x} = f(\vec{\gamma}(0)) - f(\vec{\gamma}(\pi)) = f(0, 1, 0) - f(0, -1, 0) = 0 - 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0} //$$

(c) Hay que notar que el campo $\vec{F}$ de la integral de la forma

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

puede ser simplificada a medida que se va reescribiendo:

$$\vec{F} = \left(x e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, y e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, z e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \left(x \cdot \left(e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right), y \left(e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right), z \left(e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \vec{F}(x,y,z) = \left(e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \cdot (x,y,z)$$

Notemos que, en coordenadas esféricas, $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$ y $\vec{r} = (x,y,z)$ puede reescribirse como $\vec{r} = r\hat{r}$, entonces:

$$\vec{F}(r,\theta,\phi) = \left(e^{r^2} + \frac{1}{r} \right) r\hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{F}(r) = (re^{r^2} + 1)\hat{r}}$$

Calculando el rotor (propiamente, usar expresión para coordenadas ortogonales generalizadas) se puede comprobar que $\nabla \times \vec{F} = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y, como $\vec{F}$ no se indefinire, tenemos que $\vec{F}$ es conservativo.

Nos piden:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

La integral puede calcularse fácilmente si encontramos el potencial escalar asociado a $\vec{F}$. Queremos f tal que

$$\vec{F} = -\nabla f$$

El gradiente en coordenadas esféricas está dado por:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad \left(\text{Verificar usando la expresión en coordenadas ortogonales generalizadas...} \right)$$

Entonces, se tiene que:

$$-\frac{\partial f}{\partial r} = re^{r^2} + 1 \Rightarrow f(r) = -\int (re^{r^2} + 1) dr$$

$$\Rightarrow f(r) = -\int re^{r^2} dr - r \Rightarrow \boxed{f(r) = -\frac{e^{r^2}}{2} - r}$$

Queremos la integral entre los puntos $P(1,0,0)$ y $Q(1,0,1)$. Podemos notar que eso corresponde a $P(r=1)$ y $Q(r=\sqrt{2})$. Entonces:

$$\int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1) - f(\sqrt{2}) = -\left(\frac{e}{2} - 1\right) - \left(-\frac{e^2}{2} - \sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\sqrt{2} - 1) + \frac{e}{2}(e - 1)}$$

Otra forma era reescribir $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y así:

$$f(x, y, z) = -\frac{e^{x^2 + y^2 + z^2}}{2} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} &= f(1,0,0) - f(1,0,1) = -\frac{e^{1+0+0}}{2} - \sqrt{1+0+0} - \left(-\frac{e^{1+0+1}}{2} - \sqrt{1+0+1}\right) \\ &= -\frac{e}{2} - 1 + \frac{e^2}{2} + \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{r} = (\sqrt{2} - 1) + \frac{e}{2}(e - 1)} \end{aligned}$$

P4 (e) Usamos coordenadas cilíndricas para parametrizar S . Se tiene que $z = \rho^2 - 1$, entonces:

$$\vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta), \rho^2 - 1); \quad \rho \in [1, \sqrt{2+1}]; \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Calculando vectores tangentes y vector normal:

$$\vec{t}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 2\rho) = \hat{\rho} + 2\rho \hat{k}$$

$$\vec{t}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), 0) = \rho \hat{\theta}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{t}_\rho \times \vec{t}_\theta}{\|\vec{t}_\rho \times \vec{t}_\theta\|} = \frac{(\hat{\rho} + 2\rho \hat{k}) \times \rho \hat{\theta}}{\|\vec{t}_\rho \times \vec{t}_\theta\|} = \frac{\rho(\hat{\rho} \times \hat{\theta}) + 2\rho^2(\hat{k} \times \hat{\theta})}{\|\vec{t}_\rho \times \vec{t}_\theta\|} = \frac{\rho \hat{k} - 2\rho^2 \hat{\rho}}{\|\vec{t}_\rho \times \vec{t}_\theta\|}$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{-2\rho^2 \hat{\rho} + \rho \hat{k}}{\sqrt{4\rho^4 + \rho^2}} \rightarrow \text{Queremos la normal exterior, pero notamos que esta normal entra al paraboloide, entonces, la normal exterior es cambiando el signo...}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{n} = \frac{2\rho^2 \hat{\rho} - \rho \hat{k}}{\sqrt{4\rho^4 + \rho^2}}} \rightarrow \text{Normal exterior}$$

Entonces, evaluando el campo en la parametrización ($\rho = \rho, \theta = \theta, z = \rho^2 - 1$):

$$\vec{F}(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} \hat{\rho} + \arctan\left(\frac{(\rho^2 - 1)^2}{\rho^2}\right) \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \hat{n} = \left(\frac{1}{\rho} \hat{\rho} + \arctan\left(\frac{(\rho^2 - 1)^2}{\rho^2}\right) \hat{\theta}\right) \cdot \left(\frac{2\rho^2 \hat{\rho} - \rho \hat{k}}{\sqrt{4\rho^4 + \rho^2}}\right) = \frac{2\rho}{\sqrt{4\rho^4 + \rho^2}}$$

Entonces, se tiene que:

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \int_0^{\sqrt{a+1}} \int_0^{2\pi} \frac{2\rho}{\sqrt{4\rho^4 + \rho^2 + 1}} \cdot \sqrt{4\rho^4 + \rho^2 + 1} d\theta d\rho = 2\pi \cdot \int_0^{\sqrt{a+1}} 2\rho d\rho$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{2} (a+1 - 1) \Rightarrow \boxed{\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = 2\pi a}$$

(b) Es muy importante notar que no podemos usar el Teorema de la divergencia en el volumen del paraboloides, ya que éste contiene el eje z , donde $\rho = 0$. Notamos que $\vec{F}$ y $\nabla \cdot \vec{F}$ se indefinen para $\rho = 0$, por lo tanto, escogemos otro volumen que no contenga al eje z . Usamos el volumen que encierra la superficie S del paraboloides, el cilindro de radio $\rho = c$, con $c < 1$, y los anillos con $c < \rho < 1$ y $c < \rho < \sqrt{a+1}$, que serán la base inferior y superior, respectivamente. Entonces, por teorema de la divergencia, sabemos que:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dv = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n}_1 ds + \int_C \vec{F} \cdot \hat{n}_2 ds + \int_{T_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_3 ds + \int_{T_2} \vec{F} \cdot \hat{n}_4 ds$$

Donde C es el cilindro, y T_1 y T_2 son la tapa inferior y superior, respectivamente. Inmediatamente notamos que, para T_1 y T_2 , $\hat{n}_3 = -\hat{k}$ y $\hat{n}_4 = \hat{k}$, respectivamente. Como $\vec{F}$ no tiene componente en $\hat{k}$, entonces $\vec{F} \cdot \hat{n}_3 = \vec{F} \cdot \hat{n}_4 = 0$, lo cual anula esas dos integrales.

Para el cilindro es directo notar que $\hat{n}_z = -\hat{\rho}$ (normal exterior).
Como el radio es $\rho = c$ fijo, nuestra parametrización queda:

$$\vec{O}_2(\theta, z) = (c \cdot \cos(\theta), c \cdot \sin(\theta), z); \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, a]$$

Para radio constante, $ds = \rho d\theta dz = c d\theta dz$. Así:

$$\vec{F} \cdot \hat{n}_z = \left(\frac{1}{c} \hat{\rho} + \arctan\left(\frac{z^2}{c^2}\right) \hat{\theta} \right) \cdot (-\hat{\rho}) = -\frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot \hat{n}_z ds = \int_0^a \int_0^{2\pi} -\frac{1}{c} \cdot c d\theta dz = - \int_0^a \int_0^{2\pi} d\theta dz \Rightarrow \boxed{\int_C \vec{F} \cdot \hat{n}_z ds = -2\pi a}$$

Ahora, falta calcular la integral de $\nabla \cdot \vec{F}$. Tenemos que:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \cdot \left[\cancel{\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \rho \right)} + \cancel{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right) \right)} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z} \left(0 \cdot \rho \right)} \right] \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dv = 0}$$

Entonces:

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dv - \int_C \vec{F} \cdot \hat{n}_z ds - \int_{T_1} \vec{F} \cdot \hat{n}_3 ds - \int_{T_2} \vec{F} \cdot \hat{n}_4 ds = 0 - (-2\pi a) - 0 - 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} ds = 2\pi a} //$$