MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Juvenal Letelier.
Auxiliar: Roberto Gajardo Pizarro.

Auxiliar 6: Repaso Pre-control 1.

22 de Abril de 2019

P1. Sea el campo en coordenadas cilíndricas:

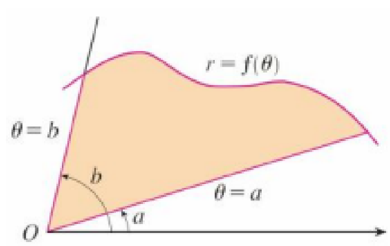
$$\vec{G}(\rho,\theta,z) = \frac{\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{\rho} - \frac{\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}$$

Calcule la divergencia y el rotor usando la definición de cada uno de estos operadores en coordenadas ortogonales generalizadas. Discuta sobre los resultados.

P2. Sea Γ una curva simple contenida en el plano XY. Suponga que Γ está parametrizada en coordenadas polares según la relación $r = f(\theta)$, es decir:

$$x(\theta) = f(\theta)\cos(\theta) \quad ; \quad y(\theta) = f(\theta)\sin(\theta); \quad \theta \in [a,b] \subset [0,2\pi)$$

Donde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ es C^1 y 2π-periódica. Sea D la región que encierra Γ y las rectas $y = m_a x$ e $y = m_b x$, que unen los extremos de Γ con el origen y cuyas pendientes son asociadas a los ángulos a y b, respectivamente. Todo lo descrito anteriormente se muestra en la siguiente imagen:



Pruebe que el área de la región encerrada D es:

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2 d\theta$$

P3. Considere el campo vectorial $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2y^2z + 5y^3)\hat{\imath} + (2x^3yz + 15xy^2 - 7z)\hat{\jmath} + (x^3y^2 - 7y + 4z^3)\hat{k}$$

a) Calcule $\nabla\times\vec{F}$. Determine si $\vec{F}$ es conservativo, y de ser el caso, encuentre un potencial escalar f para $\vec{F}$.

b) Sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por:

$$\vec{\gamma}(t) = (\sin^4(t), e^{2t(\pi-t)}\cos^5(t), \sqrt{1+t^2}\sin(t))$$

Calcule la integral del línea del campo $\vec{F}$ a través del camino C.

c) Sea Γ la hélice que une los puntos $P(1,0,0)$ y $Q(1,0,1)$, recorridos en ese orden, al dar exactamente una vuelta. Calcule:

$$\int_\Gamma \left(xe^{x^2+y^2+z^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, ye^{x^2+y^2+z^2} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, ze^{x^2+y^2+z^2} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)\cdot d\vec{r}$$

Indicación: Recuerde que $\int xexp(x^2)dx = \frac{exp(x^2)}{2} + C$

P4. Sea S la porción del paraboloide de ecuación $z = \rho^2 - 1$ (en coordenadas cilíndricas) que está delimitada por los planos $z = 0$ y $z = a$, con $a > 0$. Considere el campo vectorial dado por:

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \arctan\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)\hat{\rho}$$

Calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través de S con la orientación dada por la normal exterior:

a) Directamente por definición.

b) Usando el teorema de la divergencia.