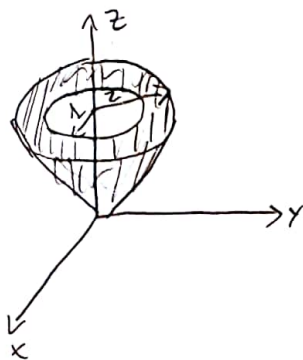


P1 Tenemos el campo $\vec{F}(x,y,z) = (x \cdot \sin(z) + y^2, z^3 - y, x^2 + \cos(z))$. LA Superficie descrita es:



→ Cono con la tapa incompleta

Sabemos que, si esta superficie estuviese cerrada, entonces podríamos usar Teorema de la divergencia, es decir:

$$\iint_A \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

Sin embargo, $S \neq A$ (donde A es la superficie del cono completo). Sea T el disco en $z=z$ tal que $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$, entonces, podemos afirmar que:

$$\iint_A \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA + \iint_T \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Entonces, reordenando y aplicando Teorema de la divergencia, tenemos que:

$$\iiint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv - \iint_T \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Calculamos:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \cancel{\sin(z)} - 1 - \cancel{\sin(z)} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \vec{F} = -1}$$

Como $\nabla \cdot \vec{F} = \text{cte}$, entonces:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv = -1 \cdot \iiint_V dv = -1 \cdot \text{Volumen cóno}$$

$$\Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv = -1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \overset{\text{Altura}}{2} \cdot \underbrace{\pi \cdot (2)^2}_{\text{base}} \Rightarrow \boxed{\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv = -\frac{8\pi}{3}}$$

Faltaría calcular $\iint_T \vec{F} \cdot \hat{n} dA$. Es evidente que $\hat{n} = \hat{z}$ es la normal exterior. Ahora, $\vec{F} \cdot \hat{z} = x^2 + \cos(z)$, como $z=2$, $\vec{F} \cdot \hat{z} = x^2 + \cos(2)$.

Pasando a polares, $x^2 = (r \cdot \cos(\theta))^2$, entonces:

$$\iint_T \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot \cos^2(\theta) r dr d\theta + 2\pi \cdot \cos(2) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta + 2\pi \cos(2)$$

$$\Rightarrow \iint_T \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta + 2\pi \cdot \cos(z) = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cos(z)$$

$$\Rightarrow \iint_T \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cos(z)$$

Entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = -\frac{8\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - 2\pi \cos(z) \Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = -\pi \cdot \left(\frac{35}{12} + 2 \cdot \cos(z) \right)}$$

↳ Flujo buscado...

 De forma similar a la pregunta anterior:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_{\text{MANCO}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA + \iint_{\text{TAPA}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

La integral de la izquierda puede hacerse con Teorema de la divergencia, y como buscamos la asociada al manco, entonces:

$$\iint_{\text{MANCO}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV - \iint_{\text{TAPA}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Calculamos la divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{F} = y^2 z + x^2 z \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = z \cdot (x^2 + y^2) = z r^2$$

$$\Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv = \iiint_V (z r^2) r dr dz d\theta \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Límites:} \\ -1 \leq z \leq 0 ; \quad z = r-1 \Rightarrow r = z+1 \\ \Rightarrow 0 \leq r \leq z+1 \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \int_0^{z+1} z r^3 dr dz d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 \frac{z(z+1)^4}{4} dz d\theta = \int_{-1}^0 \int_0^{2\pi} \frac{z(z+1)^4}{4} d\theta dz$$

$$= \frac{2\pi}{4} \cdot \int_{-1}^0 z(z+1)^4 dz \quad \left/ \begin{array}{l} u = z+1 \Rightarrow du = dz \\ \Rightarrow z = u-1 \quad \begin{array}{l} z=-1 \Rightarrow u=0 \\ z=0 \Rightarrow u=1 \end{array} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (u-1)u^4 du = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (u^5 - u^4) du = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv = \frac{-\pi}{60}}$$

Ahora calculamos el flujo por la tapa. La normal exterior es $\hat{n} = \hat{z}$, por lo tanto sólo sobrevive la componente z de $\vec{F}$. Así, usando coordenadas polares:

$$\iint_{\text{TAPA}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_{\text{TAPA}} x^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2(\theta) r dr d\theta \quad / \quad \text{Calculada en la } P_1$$

$$\Rightarrow \iint_{\text{TAPA}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \frac{\pi}{4}$$

Enlaces:

$$\begin{aligned} \iint_{\text{MANCO}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA &= \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv - \iint_{\text{TAPA}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA \Rightarrow \iint_{\text{MANCO}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \frac{-\pi}{60} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{-\pi - 15\pi}{60} = \frac{-16\pi}{60} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{\text{MANCO}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = -\frac{4\pi}{15}} //$$

P3 Para usar Teo. de la Divergencia debemos cerrar la superficie. Se tiene que:

$$\iint_{\text{MANCO}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_{\text{TOTAL}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA - \iint_{T_3} \vec{F} \cdot \hat{n} dA - \iint_{T_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dA - \iint_{P_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dA - \iint_{P_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Donde TS y TI son la TAPA superior e inferior, respectivamente, P_1 es la TAPA que está en el plano $y=0$, y P_2 es la TAPA del plano $x=0$.

Por teorema de la divergencia:

$$\iint_{\text{total}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad / \quad \nabla \cdot \vec{F} = y^2 z + x^2 z = z(x^2 + y^2) = z r^2$$

En coordenadas cilíndricas, $x^2 + y^2 = r^2$, $r \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, \pi/2]$ y $z \in [0, \pi]$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} r^2 z r dr dz d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \frac{\pi^4}{4} \cdot z dz d\theta \\ &= \frac{\pi^4}{4} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{2} d\theta = \frac{\pi^6}{8} \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \frac{\pi^7}{16} \right]$$

La normal exterior a TS es $\hat{z}$, mientras que la normal exterior a TI es $-\hat{z}$. Notemos que la componente en $\hat{z}$ de $\vec{F}$ NO depende de la variable z , YA que $F_z = x^2 \cdot e^y$, así:

$$\iint_{TS} \vec{F} \cdot \hat{n} dA + \iint_{TI} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_{TS} \vec{F} \cdot \hat{z} dA - \iint_{TI} \vec{F} \cdot \hat{z} dA = 0$$

Entonces, sólo nos faltan las paredes laterales:

(i) Para P_1 : La normal exterior es $-\hat{y}$, y la parametrización es $\sigma(x,z) = (x, 0, z)$; $x \in [0, \pi]$; $z \in [0, \pi]$.

$$(\vec{F} \cdot (-\hat{y}))|_{y=0} = (-e^x \cdot \cos(z) - x^2 y z)|_{y=0} = -e^x \cos(z)$$

$$\Rightarrow \iint_{P_1} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = - \int_0^\pi \int_0^\pi e^x \cos(z) \, dx \, dz = - \int_0^\pi (e^\pi - 1) \cdot \cos(z) \, dz$$
$$= -(e^\pi - 1) \cdot (\sin(\pi) - \sin(0))$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{P_1} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = 0}$$

(ii) Para P_2 : La normal exterior es $-\hat{x}$, y la parametrización es:

$$\sigma(y,z) = (0, y, z); \quad y \in [0, \pi], \quad z \in [0, \pi]$$

$$(\vec{F} \cdot (-\hat{x}))|_{x=0} = (-e^z \cdot \sin(y) - x y^2 z)|_{x=0} = -e^z \cdot \sin(y)$$

$$\Rightarrow \iint_{P_2} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = - \int_0^\pi \int_0^\pi e^z \cdot \sin(y) \, dz \, dy = - \int_0^\pi (e^\pi - 1) \sin(y) \, dy$$
$$= -(e^\pi - 1) \cdot (-\cos(\pi) + \cos(0))$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{P_2} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = -2 \cdot (e^\pi - 1)}$$

Entonces:

$$\iint_{\text{Manzo}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dv - \underbrace{\iint_{TS} \vec{F} \cdot \hat{n} dA}_{=0} - \iint_{TI} \vec{F} \cdot \hat{n} dA - \cancel{\iint_{P_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dA} - \iint_{P_2} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

$$= \frac{\pi^7}{16} - (-2 \cdot (e^\pi - 1)) \Rightarrow \boxed{\iint_{\text{Manzo}} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \frac{\pi^7}{16} + 2 \cdot (e^\pi - 1)}$$

P4  Por Teo. de la divergencia, se tiene que:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} dv$$

Entonces:

$$\nabla \cdot \vec{F} = x^2 + y^2$$

Podemos notar que $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$ es la región entre las dos semiesferas de radio $r=2$ y $r=3$. Para parametrizar en esféricas:

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cos(\phi) ; y = r \cdot \sin(\theta) \sin(\phi) ; z = r \cdot \cos(\theta)$$

$$r \in [2, 3] ; \theta \in [0, \pi/2] ; \phi \in [0, 2\pi]$$

Enonces:

$$\nabla \cdot \vec{F} = (r \cdot \sin(\theta) \cos(\phi))^2 + (r \cdot \sin(\theta) \sin(\phi))^2 = r^2 \cdot \sin^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dv = \int_2^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2(\theta) \cdot r^2 \sin(\theta) \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_2^3 \int_0^{\pi/2} 2\pi r^4 \sin^3(\theta) \, d\theta \, dr \quad / \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta) \, d\theta = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2\pi \cdot 2}{3} \int_2^3 r^4 \, dr = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{r^5}{5} \right) \Big|_2^3 = \frac{4\pi}{15} (243 - 32)$$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} \, dv = \frac{844\pi}{15} \Rightarrow \boxed{\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dA = \frac{844\pi}{15}}$$