

El campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Que, escrito en coordenadas cartesianas es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

e) Podemos parametrizar la esfera de radio R recordando que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Sin embargo, el $\pm$ podría hacer incómodo todo el trabajo. Una forma más simple de hacerlo es con coordenadas esféricas (recordar simetrías en los problemas), donde:

$$\vec{r}(r, \theta, \phi) = (r \cdot \sin(\theta) \cos(\phi), r \cdot \sin(\theta) \sin(\phi), r \cdot \cos(\theta))$$

Entonces, la parametrización de la superficie S queda como:

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (R \sin(\theta) \cos(\phi), R \sin(\theta) \sin(\phi), R \cos(\theta)); \theta \in [0, \pi]; \phi \in [0, 2\pi]$$

Calculando los vectores tangentes:

$$\vec{t}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R \cdot (\cos(\theta) \cos(\phi), \cos(\theta) \sin(\phi), -\sin(\theta)); \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\| = R$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{t}}_\theta = (\cos(\theta) \cos(\phi), \cos(\theta) \sin(\phi), -\sin(\theta)) = \hat{\theta}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = R \cdot (-\sin(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \cos(\phi), 0) ; \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right\| = R \cdot \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{t}_\phi = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0) = \hat{\phi}}$$

Finalmente:

$$\hat{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right\|} = \frac{R \cdot \sin(\theta) (\hat{\theta} \times \hat{\phi})}{R \cdot \sin(\theta)} = \hat{r} \Rightarrow \boxed{\hat{n} = \hat{r}}$$

Finalmente, se tiene que:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{r} dA = \iint_S \underbrace{\vec{E} \cdot \hat{r}}_{dA} \cdot \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta d\phi$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^{2\pi} (-\cos(\pi) + \cos(0)) d\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}} \rightarrow \text{Integral de Flujo...}$$

b) En este caso la parametrización de la superficie S (plano) es simple. Como cualquier punto tiene su coordenada $z=z$, entonces:

$$\vec{r}(x,y) = (x,y,z) ; x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty) \quad \longrightarrow \text{Parametrización del plano infinito}$$

Calculando los vectores tangentes:

$$t_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 0) ; \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right\| = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{t}_x = (1, 0, 0) = \hat{x}}$$

$$t_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, 0) ; \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| = 1 \Rightarrow \boxed{\hat{t}_y = (0, 1, 0) = \hat{y}}$$

Entonces:

$$\hat{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\|} = \frac{\hat{x} \times \hat{y}}{1} = \hat{z} \Rightarrow \boxed{\hat{n} = \hat{z}}$$

Así:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{z} dA = \iint_S E[(x,y,z) \cdot \hat{z}] \cdot \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| dx dy$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q \cdot z}{24\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + 4)^{3/2}} dx dy = \frac{Q}{24\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}}$$

Haciendo un cambio a coordenadas polares:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} ; r \in [0, \infty) ; \theta \in [0, 2\pi]$$

Se tiene finalmente que:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r d\theta dr}{(r^2+4)^{3/2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2+4)^{3/2}}}_I$$

Resolvamos I con el cambio de variable $u = r^2 + 4$.

$$\Rightarrow du = 2r dr \Rightarrow r dr = \frac{du}{2} \quad \left/ \begin{array}{l} r=0 \Rightarrow u=4 \\ r \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Así:

$$I = \frac{1}{2} \int_4^\infty \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot \left[\frac{1}{u^{1/2}} \right]_4^\infty = - \left[0 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

Entonces, finalmente:

$$\boxed{\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{2\epsilon_0}} \rightarrow \text{Flujo de campo eléctrico en el plano infinito...}$$

(Problema 1: Calcular con la parametrización del plano en polares:
 $\vec{r}(r, \theta) = (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta), z)$; $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$)

(C) Debemos encontrar una parametrización del manto del cilindro. Recordando las ventajas de las simetrías, usamos coordenadas cilíndricas. El radio del manto es $\rho = a$, entonces:

$$\vec{r}(\theta, z) = (a \cdot \cos(\theta), a \cdot \sin(\theta), z); \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in (-\infty, \infty)$$

Calculando los vectores tangentes:

$$\vec{t}_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-a \sin(\theta), a \cos(\theta), 0); \quad \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right\| = a \Rightarrow \boxed{\hat{t}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) = \hat{\theta}}$$

$$\underline{\hat{t}_z} = \frac{\partial \underline{\vec{e}}}{\partial z} = (0, 0, 1); \quad \left\| \frac{\partial \underline{\vec{e}}}{\partial z} \right\| = 1 \Rightarrow \underline{\hat{t}_z} = (0, 0, 1) = \underline{\hat{z}}$$

Por lo tanto, el vector normal será:

$$\underline{\hat{n}} = \frac{\frac{\partial \underline{\vec{e}}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{\vec{e}}}{\partial z}}{\left\| \frac{\partial \underline{\vec{e}}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \underline{\vec{e}}}{\partial z} \right\|} = \frac{a(\underline{\hat{\theta}} \times \underline{\hat{z}})}{a} = \underline{\hat{\rho}} \Rightarrow \underline{\hat{n}} = \underline{\hat{\rho}}$$

Tenemos que el campo eléctrico en coordenadas polares está dado por:

$$\underline{\vec{E}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta), z)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} \cdot d\underline{\vec{A}} &= \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\hat{\rho}} dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}} \cdot (a \cos(\theta), a \sin(\theta), z) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) a d\theta dz \\ &= \frac{Q \cdot a}{4\pi\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}} (a \cos^2(\theta) + a \sin^2(\theta)) d\theta dz = \frac{Q a^2 d\theta dz}{4\pi\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\iint_S \underline{\vec{E}} \cdot d\underline{\vec{A}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{Q a^2}{4\pi\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}} d\theta dz = \frac{Q a^2 \cdot 2\pi}{24\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}}}_I$$

Se hace el cambio de variable $z = a \tan(u) \Rightarrow dz = a \cdot \sec^2(u) du$
 $u = \arctan\left(\frac{z}{a}\right) \Rightarrow \begin{matrix} z \rightarrow -\infty, u \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ z \rightarrow \infty, u \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{matrix}$

Entonces:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sec^2(u) du}{(a^2 + a^2 \tan^2(u))^{3/2}} \quad / \quad a^2 + a^2 \tan^2(u) = a^2(1 + \tan^2(u)) = a^2 \cdot \sec^2(u)$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a \sec^2(u)}{(a^2 \sec^2(u))^{3/2}} du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cancel{a} \sec^2(u)}{\cancel{a^2}^{1/2} \sec^3(u)} du = \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{\sec(u)} = \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u) du$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a^2} \cdot (\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2})) \Rightarrow I = \frac{2}{a^2}$$

Entonces:

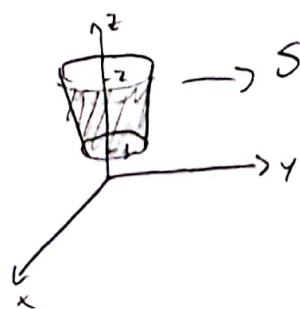
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q \cdot a^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{2}{a^2} \Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

→ Flujo de campo en el cilindro infinito...

 LA superficie cumple la ecuación de un cono:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Donde $a=b=c=1$. Sin embargo, no es un cono completo, sino que una porción de él (ya que $1 \leq z \leq 2$). Así:



→ Superficie S

Ahora, como se tiene $z^2 = x^2 + y^2$, y z es siempre positivo, podríamos parametrizar z como $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y escribir:

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

Sin embargo, hay que notar que en esa parametrización, sería difícil definir los límites de x e y . Otra parametrización que puede funcionar es en coordenadas cilíndricas, ya que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, es decir, $z = \rho$ y tendríamos que:

$$\vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta), \rho) ; \rho \in [1, 2], \theta \in [0, 2\pi]$$

Tenemos el campo vectorial:

$$\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z^2)$$

Reescribiendo en la nueva parametrización:

$$\vec{F}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \rho^2) = \rho \hat{\rho} + \rho^2 \hat{z}$$

Ahora, calculando los vectores tangentes:

$$t_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 1) = \hat{\rho} + \hat{z}$$

$$t_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), 0) = \rho \hat{\theta}$$

Y el vector normal:

$$\hat{n} = \frac{t_\rho \times t_\theta}{\|t_\rho \times t_\theta\|} = \frac{(\hat{\rho} + \hat{z}) \times \rho \hat{\theta}}{\|(\hat{\rho} + \hat{z}) \times \rho \hat{\theta}\|} = \frac{\rho(\hat{z} - \hat{\rho})}{\|\rho(\hat{z} - \hat{\rho})\|} = \frac{\rho(\hat{z} - \hat{\rho})}{\sqrt{2}\rho} \Rightarrow \boxed{\hat{n} = \frac{\hat{z} - \hat{\rho}}{\sqrt{2}}}$$

Entonces, tenemos finalmente que:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= (\rho \hat{\rho} + \rho^2 \hat{z}) \cdot \frac{(\hat{z} - \hat{\rho})}{\sqrt{2}} dA = \frac{(\rho \hat{\rho} + \rho^2 \hat{z}) \cdot (\hat{z} - \hat{\rho})}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \rho d\rho d\theta \\ &= (-\rho + \rho^2) \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

Entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_1^2 \int_0^{2\pi} (\rho^3 - \rho^2) d\theta d\rho = 2\pi \cdot \left[\int_1^2 \rho^3 d\rho - \int_1^2 \rho^2 d\rho \right]$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{4}(2^4 - 1^4) - \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) \right] = 2\pi \cdot \left[\frac{(16-1)}{4} - \frac{(8-1)}{3} \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{15}{4} - \frac{7}{3} \right] = 2\pi \left[\frac{45-28}{12} \right] = 2\pi \cdot \left[\frac{17}{6} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \frac{17\pi}{6}} \rightarrow \text{Integral de Flujo buscada...}$$

P3 Sea S_1 la tapa inferior, S_2 la tapa superior (que estará diegada), y S_3 el mazo de este extraño cuerpo. Como en la tapa inferior tendremos $z=0$, y se trata básicamente de un círculo, entonces la parametrización de esta superficie será:

$$\vec{c}_1(\rho, \theta) = (\rho \cdot \cos(\theta), \rho \cdot \sin(\theta), 0) ; \rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]$$

Entonces:

$$t_\rho = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) = \hat{\rho}$$

$$t_\theta = (-\rho \cdot \sin(\theta), \rho \cdot \cos(\theta), 0) = \rho \hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{t_\rho \times t_\theta}{\|t_\rho \times t_\theta\|} = \frac{\hat{\rho} \times \rho \hat{\theta}}{\|\hat{\rho} \times \rho \hat{\theta}\|} = \frac{\rho \hat{z}}{\rho} \Rightarrow \boxed{\hat{n} = \hat{z}} \rightarrow \text{CUIDADO: Nos piden la normal exterior, y esta es la normal interior, por lo tanto, } \underline{\hat{n} = -\hat{z}}$$

Ahora, reemplazando la parametrización en $\vec{F}$ (recordando que $z=0$):

$$\vec{F}(\rho, \theta) = (\cancel{\rho \cos(\theta) \cdot 0}, \rho \sin(\theta) \cdot \cancel{\rho \cos(\theta)}, \cancel{0 \cdot \rho \sin(\theta)})$$

$$\Rightarrow \vec{F}(\rho, \theta) = \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \hat{y}$$

Así:

$$\vec{F} \cdot d\vec{A} = \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \hat{y} \cdot (-\hat{z}) dA = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0} \rightarrow \text{Flujo a través de } S_1 \dots$$

Ahora, para S_2 (tapa superior) ya no se tiene el plano $z=0$, sino que $y+z=Z$, que es lo mismo que decir $z=Z-y$. Usando exactamente la misma parametrización:

$$\vec{r}_2(x, y) = (x, y, Z-y) \quad / \text{Cambiando a polares}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), Z - \rho \sin(\theta)); \rho \in [0, Z], \theta \in [0, 2\pi]$$

Calculando vectores tangentes:

$$t_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = (\cos(\theta), \sin(\theta), -\sin(\theta)) = \hat{\rho} - \sin(\theta) \hat{z}$$

$$t_\theta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), -\rho \cos(\theta)) = \rho \hat{\theta} - \rho \cos(\theta) \hat{z}$$

Vector normal:

$$\hat{n} = \frac{t_\rho \times t_\theta}{\|t_\rho \times t_\theta\|} = \frac{\rho}{\|t_\rho \times t_\theta\|} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & -\cos(\theta) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (-\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta)) \hat{x} \\ -(-\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \hat{y} \\ +(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \hat{z} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{\rho(\hat{y} + \hat{z})}{\|\rho(\hat{y} + \hat{z})\|} \Rightarrow \hat{n} = \frac{\rho(\hat{y} + \hat{z})}{\sqrt{2}\rho} \Rightarrow \boxed{\hat{n} = \frac{\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{2}}}$$

Notar que $\hat{n}$ es normal exterior (Apunta hacia afuera de la figura).
Entonces, escribiendo $\vec{F}$ con la parametrización:

$$\vec{F}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta) \cdot (z - \rho \sin(\theta)), \rho^2 \sin(\theta) \cos(\theta), \rho \sin(\theta) \cdot (z - \rho \sin(\theta)))$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \vec{F} \cdot \hat{n} dA = (\rho^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) (z - \rho \sin(\theta))) \frac{dA}{\sqrt{2}} \\ &= (\rho^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) (z - \rho \sin(\theta))) \frac{\sqrt{2}\rho d\rho d\theta}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\rho^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) (z - \rho \sin(\theta))) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\rho^3 (\sin(\theta) \cos(\theta) - \sin^2(\theta)) + z \rho^2 \sin(\theta)) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \rho^3 (\sin(\theta) \cos(\theta) - \sin^2(\theta)) d\rho + z \int_0^2 \rho^2 \sin(\theta) d\rho \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \left[4 \cdot (\sin(\theta) \cos(\theta) - \sin^2(\theta)) + \frac{16}{3} \sin(\theta) \right] d\theta$$

$$= 4 \cdot \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta}_{I_2} \right] + \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad / \quad \begin{array}{l} u = \sin(\theta) \Rightarrow du = \cos(\theta) d\theta \\ dv = \cos(\theta) d\theta \Rightarrow v = \sin(\theta) \end{array}$$

$$\Rightarrow I_1 = (\sin^2(\theta)) \Big|_0^{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta}_{I_1} \Rightarrow I_1 = 0 - I_1 \Rightarrow \boxed{I_1 = 0}$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \quad / \quad \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2} - \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta) d\theta}{2} = \pi - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] \Big|_0^{2\pi} \Rightarrow I_2 = \pi$$

Finalmente:

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = -4\pi} \rightarrow \text{Flujo a través de } S_2 \dots$$

Ahora falta sólo calcular el flujo a través del manto de esa superficie. Como es parte de un cilindro, se tiene $\rho = Z$ fijo. Lo que ahora cambia es z , donde $0 \leq z \leq Z - Y$. Parametrizando:

$$\vec{r}_3(x, y) = (x, y, Z - y) / \text{Pasando a polares}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_3(\theta, z) = (Z \cos(\theta), Z \sin(\theta), Z); \theta \in [0, 2\pi]; z \in [0, Z - Z \sin(\theta)]$$

Calculando vectores tangentes:

$$t_\theta = \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial \theta} = (-Z \sin(\theta), Z \cos(\theta), 0) = Z \hat{\theta}$$

$$t_z = \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial z} = (0, 0, 1) = \hat{z}$$

Entonces, el vector normal será:

$$\hat{n} = \frac{t_\theta \times t_z}{\|t_\theta \times t_z\|} = \frac{Z \hat{\theta} \times \hat{z}}{\|Z \hat{\theta} \times \hat{z}\|} = \frac{Z \hat{\rho}}{\|Z \hat{\rho}\|} = \frac{Z \hat{\rho}}{Z} \Rightarrow \boxed{\hat{n} = \hat{\rho} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)}$$

→ Normal exterior
(Apunta hacia afuera del manto)

Escribiendo $\vec{F}$ con la parametrización:

$$\vec{F}(\theta, z) = (ZZ \cos(\theta), 4 \cos(\theta) \sin(\theta), ZZ \sin(\theta))$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \vec{F} \cdot \hat{n} dA = (ZZ \cos(\theta), 4 \cos(\theta) \sin(\theta), ZZ \sin(\theta)) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) dA \\ &= (ZZ \cos^2(\theta) + 4 \cos(\theta) \sin^2(\theta)) Z dz d\theta \end{aligned}$$

Así:

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^{Z - Z \sin(\theta)} 4 \cdot (Z \cos^2(\theta) + Z \cos(\theta) \sin^2(\theta)) dz d\theta$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= 4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (2-2\sin(\theta))^2 \cos^2(\theta) + 2(2-2\sin(\theta)) \cos(\theta) \sin^2(\theta) \right] d\theta \\
&= 4 \cdot \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (4-8\sin(\theta)+4\sin^2(\theta)) \cos^2(\theta) + 4(1-\sin(\theta)) \cos(\theta) \sin^2(\theta) \right] d\theta \\
&= 4 \cdot \int_0^{2\pi} \left[2\cos^2(\theta) - 4\sin(\theta)\cos^2(\theta) + 2\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + 4\cos(\theta)\sin^2(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta) \right] d\theta \\
&= 8 \cdot \int_0^{2\pi} \left[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + 2\sin(\theta)(\cos(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) \right] d\theta
\end{aligned}$$

Trabajando todas las integrales, se llega finalmente a:

$$\boxed{\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 10\pi} \rightarrow \text{Flujo A través de } S_3$$

Entonces, el flujo total:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0 - 4\pi + 10\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = 6\pi} \rightarrow \text{Flujo total...}$$

24) Notar que el ejercicio es parecido al anterior, sólo que ahora el eje de simetría del cilindro es $\hat{y}$. Si usamos la parametrización

$$(x, y, z) = (p \cdot \cos(\theta), y, -p \cdot \sin(\theta))$$

Entonces se sigue cumpliendo que $x^2 + z^2 = p^2$, en particular para $p = 2$ (radio del cilindro). Entonces, sea S_1 la tapa inferior, S_2 la tapa superior, y S_3 el marco de este extraño cilindro.

Partiendo por S_1 , en ese caso $y = 0$, entonces:

$$\vec{r}_1(p, \theta) = (p \cos(\theta), 0, -p \sin(\theta)); p \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]$$

Calculando vectores tangente:

$$\vec{t}_p = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial p} = (\cos(\theta), 0, -\sin(\theta))$$

$$\vec{t}_\theta = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} = (-p \sin(\theta), 0, -p \cos(\theta))$$

$\hat{y}$, el vector normal:

$$\hat{n} = \frac{\vec{t}_p \times \vec{t}_\theta}{\|\vec{t}_p \times \vec{t}_\theta\|} = \frac{p}{\|\vec{t}_p \times \vec{t}_\theta\|} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ -p \sin(\theta) & 0 & -p \cos(\theta) \end{vmatrix} = \frac{-p(-\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\hat{y}}{\|\vec{t}_p \times \vec{t}_\theta\|} = \frac{p\hat{y}}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{n} = \hat{y}} \rightarrow \text{Sin embargo, queremos normal exterior, entonces, } \underline{\underline{\hat{n} = -\hat{y}}}$$

El campo $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2 + z, y - y^2 - z)$ en esta parametrización es:

$$\vec{F}(p, \theta) = (0, -p \sin(\theta), -2)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\vec{F} \cdot d\vec{A} = \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \vec{F} \cdot (-\hat{y}) dA = (1, -\rho \sin(\theta), -2) \cdot (-\hat{y}) \rho d\theta d\rho \\ = \rho^2 \sin(\theta) d\theta d\rho$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin(\theta) d\theta d\rho \Rightarrow \boxed{\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0} \rightarrow \text{Flujo por la TAPA inferior...}$$

Ahora, en el caso de S_2 (TAPA superior) se puede usar la misma parametrización, sólo que ahora $\gamma = 2 - z$. Así:

$$\vec{r}_2(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), 2 + \rho \sin(\theta), -\rho \sin(\theta)); \rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]$$

Calculando vectores tangentes:

$$t_\rho = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \rho} = (\cos(\theta), \sin(\theta), -\sin(\theta))$$

$$t_\theta = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta} = (-\rho \sin(\theta), \rho \cos(\theta), -\rho \cos(\theta))$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{t_\rho \times t_\theta}{\|t_\rho \times t_\theta\|} = \frac{\rho}{\|t_\rho \times t_\theta\|} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & -\cos(\theta) \end{vmatrix} = \frac{\rho}{\|t_\rho \times t_\theta\|} \begin{bmatrix} (-\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)) \hat{x} \\ -(-\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \hat{y} \\ +(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \hat{z} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{\rho(\hat{y} + \hat{z})}{\|t_\rho \times t_\theta\|} = \frac{\rho(\hat{y} + \hat{z})}{\rho\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\hat{n} = \frac{\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{2}}} \rightarrow \text{Normal, en este caso si es exterior al cuerpo...}$$

El campo $\vec{F}$ parametrizado es:

$$\vec{F}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta)(2 + \rho \sin(\theta)), (2 + \rho \sin(\theta))^2 - \rho \sin(\theta), (2 + \rho \sin(\theta)) - (2 + \rho \sin(\theta))^2 - 2)$$

Encuentra:

$$\vec{F} \cdot d\vec{A} = \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \vec{F} \cdot \frac{(\hat{y} + \hat{z})}{\sqrt{2}} dA$$

$$= \left((2 + \cancel{\rho \sin(\theta)})^2 - \cancel{\rho \sin(\theta)} + \cancel{2 + \rho \sin(\theta)} - (2 + \cancel{\rho \sin(\theta)})^2 - 2 \right) \frac{\rho \sqrt{2}}{\sqrt{2}} d\rho d\theta$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0} \rightarrow \text{Flujo por la cara superior...}$$

Finalmente para el manto, tenemos $\rho = z$ constante, y tenemos que y va variando, entonces:

$$\vec{e}_3(\theta, y) = (2\cos(\theta), y, -2\sin(\theta)); \theta \in [0, 2\pi], y \in [0, 2 + 2\sin(\theta)]$$

Calculando vectores tangentes:

$$t_\theta = \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial \theta} = (-2\sin(\theta), 0, -2\cos(\theta))$$

$$t_y = \frac{\partial \vec{e}_3}{\partial y} = (0, 1, 0)$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{t_\theta \times t_y}{\|t_\theta \times t_y\|} = \frac{z}{\|t_\theta \times t_y\|} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\sin(\theta) & 0 & -\cos(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{z}{\|t_\theta \times t_y\|} \begin{bmatrix} (\cos(\theta))\hat{x} \\ -0\hat{y} \\ +(-\sin(\theta))\hat{z} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \frac{z(\cos(\theta)\hat{x} - \sin(\theta)\hat{z})}{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{n} = \cos(\theta)\hat{x} - \sin(\theta)\hat{z}}$$

Normal exterior
notar que es el
"j" de nuestra
parametrización

El campo con esta parametrización queda:

$$\vec{F}(y, \theta) = (2y \cos(\theta), y^2 - 2 \sin(\theta), y - y^2 - 2)$$

Entonces:

$$\vec{F} \cdot d\vec{A} = \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \vec{F} \cdot (\cos(\theta)\hat{x} - \sin(\theta)\hat{z}) dA$$

$$= (2y \cos^2(\theta) + (y - y^2 - 2) \cdot (-\sin(\theta))) 2 dy d\theta$$

$$= 2(2y \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(y - y^2 - 2)) dy d\theta$$

$$\Rightarrow \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2+2\sin(\theta)} 2(2y \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(y - y^2 - 2)) dy d\theta$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \left[2 \cos^2(\theta) \frac{1}{2} (2+2\sin(\theta))^2 - \sin(\theta) \left(\frac{1}{2} (2+2\sin(\theta))^2 - \frac{1}{3} (2+2\sin(\theta))^3 - 2(2+2\sin(\theta)) \right) \right] d\theta$$

$$\Rightarrow \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \left[4 \cos^2(\theta) + 8 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) - 2 \sin(\theta) - 4 \sin^2(\theta) - 2 \sin^3(\theta) + \frac{8}{3} \sin(\theta) + 8 \sin^2(\theta) + 8 \sin^3(\theta) + \frac{8}{3} \sin^4(\theta) + 4 \sin(\theta) + 4 \sin^2(\theta) \right] d\theta$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi} \left[4 + \cancel{\frac{14}{3} \sin(\theta)} + 4 \sin^2(\theta) + 6 \sin^3(\theta) + \frac{8}{3} \sin^4(\theta) + 8 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + 4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \right] d\theta$$

Y, luego de mucha Trigonometría, se llega a:

$$\boxed{\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 30\pi} \rightarrow \text{Flujo en el manto...}$$

Entonces, el flujo total será:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 0 + 0 + 30\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = 30\pi} \rightarrow \text{Flujo en toda la superficie...}$$