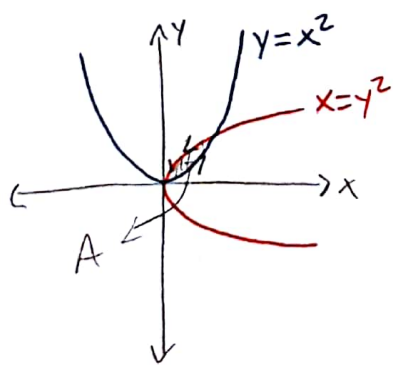


Este ejercicio nos muestra lo útil que puede ser el Teorema de Green en el cálculo de integrales de línea (muy usadas en Física e ingeniería). Este teorema nos dice que, PARA un campo vectorial  $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{x} + Q(x,y)\hat{y}$ , se tiene:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \rightarrow \text{C debe recorrerse en sentido antihorario}$$

Donde  $S$  es la superficie encerrada por la curva  $C$ , la cual debe ser cerrada. En el caso de esta pregunta tenemos que  $\vec{F}(x,y) = (2x+y^2, 3y-4x)$ , lo que implica que  $P(x,y) = 2x+y^2$  y  $Q(x,y) = 3y-4x$ . El camino  $C$  corresponde al contorno de la lenteja formada por  $y=x^2$  y  $x=y^2$ , es decir:



$\rightarrow$  La lenteja se recorre en sentido Antihorario.

Se tiene que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -4 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

Entonces, para calcular la integral usando teorema de Green sólo nos falta encontrar los puntos de intersección. Reemplazando directo:

$$y=x^2 \text{ y } x=y^2 \Rightarrow x=(x^2)^2 \Rightarrow x=x^4 \Rightarrow x \cdot (x^3-1) = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ y } x^3-1=0 \text{ / Única raíz real: } x=1$$

$$\Rightarrow \boxed{x=0 ; x=1} \rightarrow \text{Puntos de intersección}$$

Entonces, tenemos los límites de la integral de  $x$ . Para los límites de  $y$  usamos  $y=x^2$  e  $y=\sqrt{x}$  (ignoramos  $-\sqrt{x}$  porque se tiene  $y \geq 0$ ), notando que  $\sqrt{x} \geq x^2$  en el intervalo trabajado. Así, en virtud del Teorema de Green se tiene que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-4 - 2y) dy dx$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -4 \cdot \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy dx - 2 \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy dx$$

$$= -4 \cdot \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx - 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{2} ((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2) dx$$

$$= -4 \cdot \left( \frac{2}{3} (x^{3/2}) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} (x^3) \Big|_0^1 \right) - \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= -4 \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{1}{2} (x^2) \Big|_0^1 - \frac{1}{5} (x^5) \Big|_0^1 \right)$$

$$= -\frac{4}{3} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{-40 - 15 + 6}{30} = \frac{-49}{30}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{-49}{30}} \rightarrow \text{Integral de línea pedida.}$$

P2 (a) Recordando que en polares se tiene que:

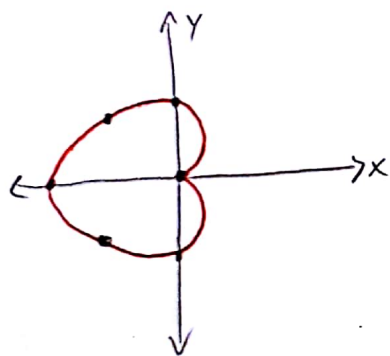
$$x = r \cdot \cos(\theta)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta)$$

Entonces, una parametrización directa del problema sería:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(t) \cdot (1 - \cos(t)) \\ y = a \cdot \sin(t) \cdot (1 - \cos(t)) \end{cases} ; t \in [0, 2\pi)$$

Si reemplazamos algunos valores de  $t$  en las ecuaciones, podemos notar que la curva es una cardioides:



|                                                 |                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $t = 0 \Rightarrow x = 0 ; y = 0$               | $t = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$<br>$y = \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$  |
| $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0 ; y = a$   |                                                                                                                                                       |
| $t = \pi \Rightarrow x = -2a ; y = 0$           | $t = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$<br>$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ |
| $t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 0 ; y = -a$ |                                                                                                                                                       |

(b) Puede notarse que, al reemplazar la parametrización en  $\vec{F}(x, y)$ , la integral de línea se vuelve bastante complicada. Una forma de hacerlo es notar que  $\vec{F}(x, y)$  se puede escribir como el gradiente de un campo escalar  $f(x, y)$ , resultando en:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_a^b (\nabla f(x(t), y(t))) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Recordando que:

$$\frac{d}{dt}(f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \nabla f(x, y) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Se tiene finalmente que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(x,y)) dt$$

Por TFC obtenemos finalmente:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Para encontrar  $f(x,y)$  recordemos:

$$\frac{d}{dx}(\sin(f(x))) = \cos(f(x)) \cdot f'(x) ; \quad \frac{d}{dx}(\ln(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Así, desarrollando llegamos a:

$$f(x,y) = \sin(x^2 y^2) + \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\Rightarrow f(\theta) = \sin(e^4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) (1 - \cos(\theta))^4) + \ln(a^2 (1 - \cos(\theta))^2 + 1)$$

Y, entonces:

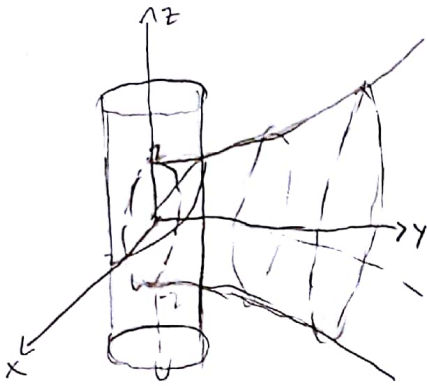
$$\int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sin(e^4 \cos^2(2\pi) \sin^2(2\pi) (1 - \cos(2\pi))^4) + \ln(a^2 (1 - \cos(2\pi))^2 + 1) \\ - \sin(e^4 \cos^2(0) \sin^2(0) (1 - \cos(0))^4) + \ln(a^2 (1 - \cos(0))^2 + 1)$$

Finalmente, desarrollando se tiene que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \text{Trabajo Nulo}$$

P3

(a) Hay que notar que, para  $y$  fijo, se forman circunferencias en el plano  $xz$  y, como  $4+y^2$  tiene forma de parábola, el radio aumenta con este radio. Entonces:



(Dibujé lo mejor posible)

(b) Al intersectar con el cilindro de ecuación  $x^2+y^2=4$ , se puede jugar con la ecuación de la superficie  $z^2+x^2=4+y^2$ . Así:

$$z^2+x^2=4+y^2 \quad / \quad 4=x^2+y^2$$

$$\Rightarrow z^2+x^2=x^2+2y^2 \quad / \quad y \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \sqrt{2}|y|}$$

Describiendo la curva  $C$  en coordenadas cilíndricas:

$$x^2+y^2=4 \Rightarrow r^2=4 \Rightarrow r=2$$

$$\boxed{x=r \cdot \cos(\theta) ; y=r \cdot \sin(\theta) ; z=\sqrt{2}|r \cdot \sin(\theta)|} \quad \rightarrow \text{YA que } y \geq 0$$

$$\Rightarrow C = (2 \cdot \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 2\sqrt{2} \sin(\theta)) ; \theta \in [0, \pi]$$

(c) Usando lo encontrado en la parte anterior podemos escribir el campo sólo en términos de  $\theta$ . Así:

$$\vec{F}(\theta) = (2 \cdot \sin(\theta) + 2\sqrt{2} \sin(\theta)) \hat{p} + \frac{2\sqrt{2} \cdot \sin(\theta)}{2} \hat{\theta} + ((2\sqrt{2} \sin(\theta))^2 - 2 \cdot \cos(\theta)) \hat{z}$$

Escribiendo  $\hat{p}$  y  $\hat{\theta}$  en coordenadas cartesianas:

$$\hat{p} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) ; \hat{\theta} = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) ; \hat{z} = (0, 0, 1)$$

Se puede escribir:

$$\vec{F}(\theta) = ((2+2\sqrt{2})\sin(\theta)\cos(\theta) - \sqrt{2}\sin^2(\theta))\hat{x} + ((2+2\sqrt{2})\sin^2(\theta) + \sqrt{2}\sin(\theta)\cos(\theta))\hat{y} + ((2\sqrt{2}\sin(\theta))^3 - 2\cos^2(\theta))\hat{z}$$

Escribiendo  $d\vec{e}$  en cartesianas:

$$d\vec{e} = (2\sin(\theta), 2\cos(\theta), 2\sqrt{2}\cos(\theta))d\theta$$

Entonces:

$$\vec{F} \cdot d\vec{e} = \left( -(4+4\sqrt{2})\sin^2(\theta)\cos(\theta) + 2\sqrt{2}\sin^3(\theta) + (4+4\sqrt{2})\sin^2(\theta)\cos(\theta) + 2\sqrt{2}\sin(\theta)\cos^2(\theta) + 2\sqrt{2}\cos(\theta)(2\sqrt{2}\sin(\theta))^3 - 4\sqrt{2}\cos^2(\theta) \right) d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{e} = 2\sqrt{2}(\sin^3(\theta) + \sin(\theta)\cos^2(\theta) + 16\sqrt{2}\cos(\theta)\sin^3(\theta) - 2\cos^2(\theta))$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{e} = 2\sqrt{2}(\sin(\theta) + 16\sqrt{2}\cos(\theta)\sin^3(\theta) - 2\cos^2(\theta))$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{e} = 2\sqrt{2} \left[ \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta + 16\sqrt{2} \int_0^\pi \cos(\theta)\sin^3(\theta) d\theta - 2 \int_0^\pi \cos^2(\theta) d\theta \right]$$

$$= 2\sqrt{2} \left[ (-\cos(\theta)) \Big|_0^\pi + 16\sqrt{2} \cdot \left( \frac{\sin^4(\theta)}{4} \right) \Big|_0^\pi - 2 \cdot \left( \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) \right) \Big|_0^\pi \right]$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{e} = 2\sqrt{2} \cdot [2 - \pi] \Rightarrow \boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{e} = 2\sqrt{2}(2 - \pi)}$$

Para cerrar el camino notamos que  $\vec{e}(0) = (2, 0, 0)$  y  $\vec{e}(\pi) = (-2, 0, 0)$ .  
Entonces, basta con una recta entre  $x = -2$  y  $x = 2$ . En este camino  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = (t-2, 0, 0); t \in [0, 4]$$

Recordando,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{t^2} = t \quad ; \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(0) = 0 \quad ; \quad z = z = 0$$

Entonces:

$$\vec{F} = (\cancel{t \cdot \sin(0)} + 0) \hat{\rho} + \cancel{\frac{0}{t} \cdot \sin(0)} \hat{\theta} + (0 - t \cos(0)) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -t \hat{z} \quad ; \quad d\vec{r} = (1, 0, 0)$$

Entonces:

$$\int_{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^4 (0, 0, -t) \cdot (1, 0, 0) dt = 0$$

Entonces, se tiene que:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\sqrt{2}(2-\pi)$$

P4 Parecido al ejercicio 1, haciendo uso del Teorema de Green:

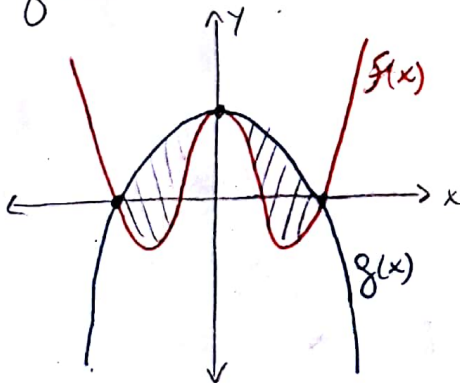
$$\vec{F}(x,y) = (x^2y, -y^2) \Rightarrow P(x,y) = x^2y ; Q(x,y) = -y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 ; \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \left[ \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R -x^2 dy dx \right] \rightarrow \text{Hecho esto, sólo nos falta encontrar las puntas de intersección entre } f(x) \text{ y } g(x) \text{ para conocer los límites de la integral.}$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 4 - x^2 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) - (4 - x^2) = 0$$

También puede Ayudar dibujar las gráficas:



$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) + (x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 ; x = 2 ; x = -2$$

Entonces,  $-2 \leq x \leq 2$  y  $f(x) \leq y \leq g(x)$  (YA que en ese intervalo  $f(x) \leq g(x)$ ). Así, en virtud del Teorema de Green:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_{-2}^2 \int_{(x^2-4)(x^2-1)}^{4-x^2} -x^2 dy dx = - \int_{-2}^2 -x^2 [4-x^2 - (x^2-4)(x^2-1)] dx \\ &= - \int_{-2}^2 x^2 [(x^2-4)x^2] dx = - \int_{-2}^2 x^4 (x^2-4) dx = - \int_{-2}^2 x^6 dx + 4 \int_{-2}^2 x^4 dx \end{aligned}$$

(Explico este signo Al Final \*)

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{7} \cdot (x^7) \Big|_{-2}^2 + 4 \cdot \frac{1}{5} (x^5) \Big|_{-2}^2$$

$$= -\frac{1}{7} \cdot (2^7 - (-2)^7) + \frac{4}{5} \cdot (2^5 - (-2)^5)$$

$$= -\frac{1}{7} \cdot 256 + \frac{4}{5} \cdot 64 = -\frac{256}{7} + \frac{256}{5} = 256 \left( -\frac{1}{7} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= 256 \left( \frac{-5+7}{35} \right) \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{512}{35}} \rightarrow \text{Integral de línea...}$$

(\*) IMPORTANTE: El Teorema de Green sólo puede usarse para curvas parametrizadas en sentido Antihorario. En este caso, Al estar orientada en sentido horario, se agrega el signo negativo a la integral doble.

**P5** Una de las grandes (y astutas) aplicaciones del Teorema de Green es poder calcular áreas de regiones extrañas o complicadas, pero que tienen una curva con una parametrización simple.

Por definición, el Área de una región  $R$  en el plano está dada por:

$$A = \iint_R dS$$

Asociando una integral al teorema de Green, debemos encontrar  $P(x,y)$  y  $Q(x,y)$  tales que  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ . Si se toma  $P(x,y) = -\frac{y}{2}$  y  $Q(x,y) = \frac{x}{2}$  se cumple la condición, entonces:

$$A = \oint_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{r} ; \text{ con } \vec{F}(x,y) = -\frac{y}{2} \hat{x} + \frac{x}{2} \hat{y} \text{ y } d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y}$$

Entonces, teniendo una parametrización sencilla de  $x$  e  $y$ , la integral puede desarrollarse. Para el caso del ejercicio se tiene:

$$x = 8 \cdot \cos^3(\theta) \Rightarrow dx = -24 \cdot \cos^2(\theta) \sin(\theta) d\theta ; \theta \in [0, 2\pi)$$

$$y = 8 \cdot \sin^3(\theta) \Rightarrow dy = 24 \sin^2(\theta) \cos(\theta) d\theta$$

Entonces, reemplazando directamente:

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (8 \cdot \cos^3(\theta) \cdot 24 \cdot \sin^2(\theta) \cos(\theta) + 8 \sin^3(\theta) \cdot 24 \cos^2(\theta) \sin(\theta)) d\theta$$

$$= \frac{192}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (\sin^2(\theta) \cos^4(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^4(\theta)) d\theta$$

$$= 97 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \cdot (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta$$

$$= 97 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) d\theta$$

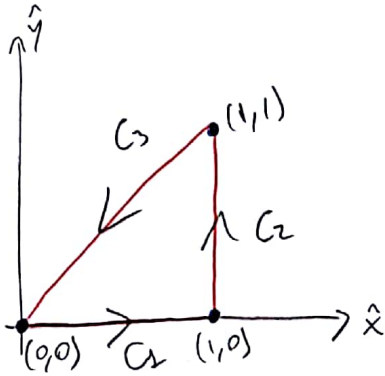
Puede resolverse usando integración por partes, Aunque acá se dará por conocida.  
 $\int \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{32} \cdot (4x - \sin(4x)) + C$

$$\Rightarrow A = \frac{97}{32} \cdot (4x - \sin(4x)) \Big|_0^{2\pi} = \frac{97}{32} \cdot (4 \cdot 2\pi - \sin(8\pi) - 4 \cdot 0 + \sin(0))$$

$$= \frac{8\pi \cdot 97}{4 \cdot 32} \Rightarrow \boxed{A = \frac{97\pi}{4}}$$

↳ Área de la hipocicloide...

P1 El campo vectorial  $\vec{F}$  se ve particularmente simple, e invita a usar Teorema de Green, sin embargo, veamos primero el contorno sobre el cual se calcula esta integral:



Parametrizar rectas es posible. En este caso:

$$C_1: \vec{r}_1 = t \cdot (1, 0) ; t \in [0, 1]$$

$$C_2: \vec{r}_2 = (1, t) ; t \in [0, 1]$$

$$C_3: \vec{r}_3 = (1-t, 1-t) ; t \in [0, 1]$$

Así, podríamos calcular directamente:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Reemplazando:

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^1 (0, t^2) \cdot (1, 0) dt + \int_0^1 (t^2, 1) \cdot (0, 1) dt + \int_0^1 ((1-t)^2, (1-t)^2) \cdot (-1, -1) dt$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + \int_0^1 dt + \int_0^1 -2(1-t)^2 dt = 1 - 2 \int_0^1 (1-2t+t^2) dt = 1 - 2 \left[ \int_0^1 dt - 2 \int_0^1 t dt + \int_0^1 t^2 dt \right]$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1 - 2 \left[ 1 - 1 + \frac{1}{3} \right] = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3}}$$

También es válido invocar al teorema de Green. En este caso:

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \Rightarrow P(x,y) = y^2; Q(x,y) = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2y; \frac{\partial P}{\partial x} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x-y)$$

Entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

En el caso del triángulo notamos que  $x \in [0,1]$ , mientras que  $y$  está acotado por debajo por  $x=0$ , y por arriba por la recta  $y=x$ , entonces  $0 \leq y \leq x$ . Así:

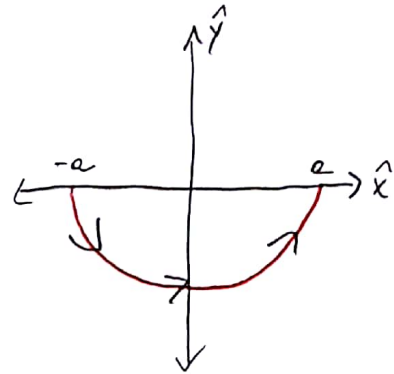
$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \int_0^x 2(x-y) dy dx = 2 \cdot \left[ \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \right] = 2 \cdot \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx$$

$$\Rightarrow \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3}} \rightarrow \text{Se obtiene el mismo resultado //}$$


 Esta es una curva en el espacio. Vayamos revisando una a una. Para  $C_1$ :

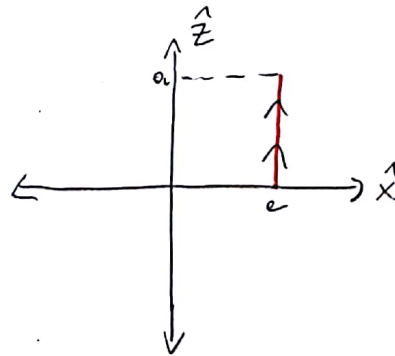
$$\vec{r}_1(t) = (a \cdot \cos(t), a \cdot \sin(t), 0); t \in [\pi, 2\pi]$$

Es la típica parametrización de una circunferencia, pero como va de  $\pi$  a  $2\pi$ , es media circunferencia (en el plano  $xy$ ).



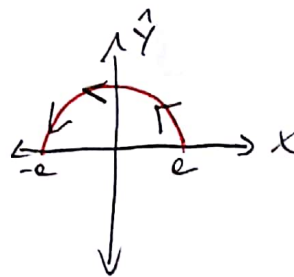
$$\vec{r}_2(t) = (a, 0, at); t \in [0, 1]$$

Es la parametrización de una recta vertical en el plano  $xz$ , ya que  $x=a$  constante,  $y=0$  y  $z$  aumenta linealmente.

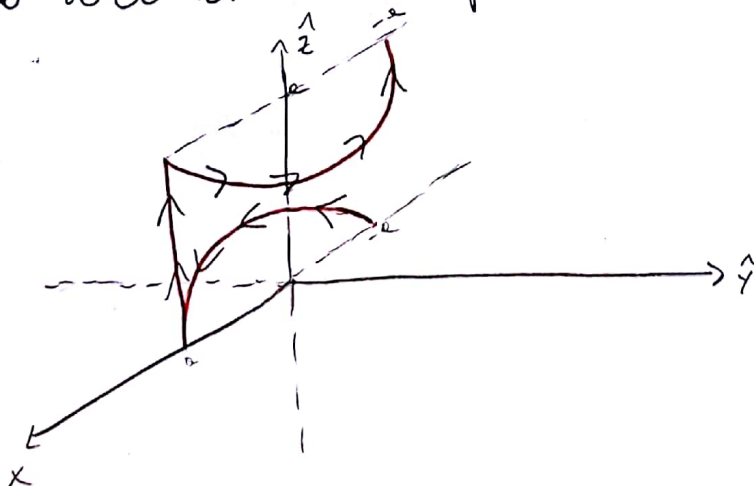


$$\vec{r}_3(t) = (a \cos(t), a \sin(t), a); t \in [0, \pi]$$

Nuevamente una semicircunferencia, sin embargo, al situarlas en el espacio estará a una altura  $a$ .



Junzando todo en el espacio:



Entonces, calculando:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r}_3$$

Para cada tramo calculamos  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ :

$$(i) \vec{r}_1 = (a \cos(t), a \sin(t), 0) \Rightarrow d\vec{r}_1 = (-a \sin(t), a \cos(t), 0) dt$$

$$\vec{F} = \left( \frac{a \cos(t)}{a}, \frac{a \sin(t)}{a}, 0 \right) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = (\cos(t), \sin(t), 0) \cdot (-a \sin(t), a \cos(t), 0) dt \\ = -a \cos(t) \sin(t) + a \cos(t) \sin(t) + 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = 0}$$

$$(ii) \vec{r}_2 = (a, 0, at) \Rightarrow d\vec{r}_2 = (0, 0, a) dt$$

$$\vec{F} = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2}}, \frac{0}{\sqrt{a^2}}, at \right) \Rightarrow \vec{F} = (1, 0, at)$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = (1, 0, at) \cdot (0, 0, a) dt \Rightarrow \boxed{\vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = a^2 t}$$

$$(iii) \vec{r}_3 = (a \cos(t), a \sin(t), a) \Rightarrow d\vec{r}_3 = (-a \sin(t), a \cos(t), 0) dt$$

$$\vec{F} = \left( \frac{a \cos(t)}{a}, \frac{a \sin(t)}{a}, a \right) \Rightarrow \vec{F} = (\cos(t), \sin(t), a)$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r}_3 = -a \sin(t) \cos(t) + a \cos(t) \sin(t) + 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F} \cdot d\vec{r}_3 = 0}$$

Entonces:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 a^2 t dt \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{a^2}{2}} \rightarrow \text{Integral de línea del campo } \vec{F} \text{ sobre } C \dots$$