

Capítulo 7

El teorema del cambio de variables

En este capítulo estudiaremos el otro resultado fundamental, aparte del teorema de Fubini, que nos ayudará a calcular integrales múltiples sobre recintos de forma no rectangular y que además permitirá simplificar el cálculo de muchas integrales múltiples (de manera parecida a como un caso particular de este resultado, el método de integración por sustitución, simplifica el cálculo de muchas integrales de funciones de una variable). Primero enunciaremos el teorema del cambio de variables y veremos varios ejemplos de sus aplicaciones. La demostración de este resultado es larga y complicada, y en una primera lectura podría omitirse; lo fundamental es comprender bien su enunciado y saber aplicarlo correctamente.

Antes de enunciar el teorema, recordemos que el (determinante) *jacobiano* de una aplicación diferenciable $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (donde A es un abierto de $\mathbb{R}^n$) se define como

$$Jf(x) = \det(f'(x))$$

para cada $x \in A$. Un *difeomorfismo* (de clase C^p) g entre dos abiertos A y B de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $g : A \longrightarrow B$ biyectiva y diferenciable (de clase C^p), tal que su inversa $g^{-1} : B \longrightarrow A$ es también diferenciable (de clase C^p).

Recordemos también que, como consecuencia del teorema de la función inversa, si A es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación inyectiva y diferenciable (de clase C^p) en A tal que $Jg(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, entonces $g(A)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $g : A \longrightarrow g(A)$ es un difeomorfismo (de clase C^p).

Teorema 7.1 Sean A y B subconjuntos abiertos y con volumen de $\mathbb{R}^n$, y sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1 . Entonces, para toda función integrable

$f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, la función $(f \circ g)|Jg|$ es integrable en A , y

$$\int_B f = \int_A (f \circ g)|Jg|.$$

Observación 7.2 Si denotamos $g = (g_1, \dots, g_n)$; $y_1 = g_1(x)$, ..., $y_n = g_n(x)$; y

$$Jg = \frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)},$$

entonces la conclusión del teorema puede escribirse así:

$$\int_B f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \int_A f(g(x_1, \dots, x_n)) \left| \frac{\partial(g_1, \dots, g_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right| dx_1 \dots dx_n.$$

Es conveniente hacer notar que el hecho de que en este teorema A y B sean abiertos no supone en la práctica ninguna restricción para el cálculo de integrales, ya que, al tener A y B volumen, sus fronteras tienen medida cero, y entonces, por los teoremas 4.1(vii) y 3.6 las integrales sobre la adherencia y el interior de A (y de B) coinciden, de modo que

$$\int_{\overline{B}} f = \int_B f = \int_A (f \circ g)|Jg| = \int_{\overline{A}} (f \circ g)|Jg|,$$

incluso si g dejara de ser un difeomorfismo en la frontera de A o Jg no estuviera bien definido en dicha frontera. Se sigue de estas observaciones que *el enunciado del teorema del cambio de variables sigue siendo válido si A y B se reemplazan por conjuntos con volumen cuyos interiores son difeomorfos mediante un difeomorfismo g de clase C^1* . La sección dedicada al cambio a coordenadas polares (ver más adelante) ilustrará este hecho.

Antes de ver ejemplos y aplicaciones de este teorema, esbozaremos una justificación intuitiva del mismo. Sea S un rectángulo *muy pequeño* contenido en A . Entonces, como g es un difeomorfismo, g es *aproximadamente* una aplicación afín en las proximidades de S , y $g(S)$ es *aproximadamente* un paralelepípedo. Si g fuera realmente afín sobre S , el volumen de $g(S)$ sería $|\det g|v(S)$. Como la aplicación $y \mapsto g(x) + Dg(x)(y - x)$ aproxima bien a g cerca de x y es una aplicación afín, tendríamos que el volumen de $g(S)$ sería aproximadamente igual a $|Jg|v(S)$, es decir, haciendo S cada vez más pequeño, tendríamos que estas *cantidades infinitesimales* coinciden:

$$f(g(x))|Jg(x)|dx = f(y)dy,$$

luego, *sumando* todas estas cantidades infinitesimales (es decir, integrando), obtendríamos el resultado:

$$\int_A f(g(x))|Jg(x)|dx = \int_B f(y)dy.$$

Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 7.3 Usando el teorema del cambio de variables, hallar el volumen del paralelepípedo engendrado por los vectores $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 1)$, y $(0, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 7.4 Usando el cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$, calcular $\int_0^1 \int_y^1 (x^2 + y^2) dx dy$.

Hay algunos cambios de variable que son particularmente útiles en multitud de situaciones prácticas y que por ello merecen una atención especial. Los cambios a coordenadas polares, esféricas o cilíndricas son algunos de los más empleados.

Coordenadas polares

Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Aunque g es diferenciable de clase C^∞ , no es inyectiva en todo $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, si la restringimos al abierto $U = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$ entonces sí que es inyectiva (compruébese), y su jacobiano es

$$Jg(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r > 0$$

en todo este conjunto U , luego por el teorema de la función inversa $g : U \longrightarrow g(U)$ es un difeomorfismo de clase C^∞ ; se comprueba inmediatamente que $g(U) = \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\})$. Es decir, g transforma difeomórficamente la banda abierta U sobre todo el plano excepto los puntos de la recta $y = 0$ con coordenada x positiva. Como dichos puntos forman un subconjunto de medida cero de $\mathbb{R}^2$, estos puntos no afectan al valor de las integrales a las que se aplique el cambio de variables g (ver la observación 7.2) y, para nuestros propósitos de cálculo de integrales, podemos actuar como si g fuera una biyección definida de la banda cerrada $\overline{U} = \{(r, \theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ sobre todo el plano $\mathbb{R}^2$.

De esta manera, si B es cualquier subconjunto con volumen de $\mathbb{R}^2$, y $A = g^{-1}(B)$, al aplicar el teorema del cambio de variables a la transformación g (y teniendo en cuenta las observaciones anteriores), se obtiene la siguiente fórmula:

$$\int_B f(x, y) dx dy = \int_A f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Ejemplo 7.5 Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Aplicar el cambio de variables a coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ para hallar

$$\int_A e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Ejemplo 7.6 Calcular $\int_D \log(x^2 + y^2) dx dy$, donde $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$.

Ejemplo 7.7 Hallar el área de un círculo de radio r usando el cambio a coordenadas polares.

Coordenadas esféricas

Sea ahora $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$g(r, \varphi, \theta) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi).$$

Como sucedía en el caso de las coordenadas polares, g es C^∞ pero no es inyectiva en todo $\mathbb{R}^3$. No obstante, restringiéndola al abierto $U = \{(r, \varphi, \theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$, g sí es inyectiva (no es difícil comprobarlo), y su jacobiano es

$$Jg(r, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi > 0$$

en cada $(r, \varphi, \theta) \in U$, luego por el teorema de la función inversa $g : U \longrightarrow g(U)$ es un difeomorfismo de clase C^∞ . Se ve fácilmente que $g(U) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0\}$. Es decir, g transforma difeomórficamente la banda abierta U sobre todo el espacio $\mathbb{R}^3$ excepto los puntos del plano $y = 0$ con coordenada x positiva. Pero dichos puntos forman un subconjunto de medida cero de $\mathbb{R}^3$, luego estos puntos no afectan al valor de las integrales a las que se aplique el cambio de variables g y, como en el caso de las coordenadas

polares, para calcular integrales podemos hacer como si g fuera una biyección definida de $\overline{B} = \{(r, \varphi, \theta) : r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ sobre todo $\mathbb{R}^3$. En este caso, si B es cualquier subconjunto con volumen de $\mathbb{R}^3$, y $A = g^{-1}(B)$, aplicando el teorema del cambio de variables a g , obtenemos la siguiente fórmula:

$$\int_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_A f(r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

Ejemplo 7.8 Sea B la bola unidad de $\mathbb{R}^3$. Calcular las integrales

$$\int_B \frac{dx dy dz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}} \quad y \quad \int_B e^{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz.$$

Coordenadas cilíndricas

El cambio a coordenadas cilíndricas consiste en hacer un cambio a polares en las coordenadas x, y de cada punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, mientras que la coordenada z permanece fija. La transformación adecuada es pues

$$g(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z),$$

donde g está definida en el abierto $U = \{(r, \theta, z) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, y su imagen es todo $\mathbb{R}^3$ excepto los puntos del plano $y = 0$ con coordenada $x \geq 0$ (puntos que forman un subconjunto de medida cero de $\mathbb{R}^3$). El jacobiano de g es en este caso $Jg(r, \theta, z) = r > 0$ en U . Así, si B es cualquier subconjunto con volumen de $\mathbb{R}^3$, y $A = g^{-1}(B)$, tenemos la siguiente fórmula de cambio de variables:

$$\int_B f(x, y) dx dy dz = \int_A f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Ejemplo 7.9 Calcular $\int_D z e^{-x^2 - y^2} dx dy dz$, donde $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Ejemplo 7.10 Calcular $\int_D z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, donde $D = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$.

Ejemplo 7.11 Hallar el valor de

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Demostración del teorema 7.1

La demostración del teorema del cambio de variables es necesariamente larga y complicada técnicamente. Seguiremos estos pasos:

- Paso 1: Si $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal y A un conjunto con volumen entonces $v(L(A)) = |\det L|v(A)$.
- Paso 2: Si C es un conjunto con volumen tal que $\overline{C} \subset A$, entonces $g(C)$ también tiene volumen.
- Paso 3: Si $C \subset A$ es un conjunto cerrado y con volumen, entonces

$$v(g(C)) \leq \int_C |Jg|.$$

- Paso 4: Sea C un subconjunto cerrado y con volumen de A . Entonces, para toda $f : g(C) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable,

$$\int_{g(C)} f = \int_C (f \circ g) |Jg|.$$

- Paso 5: El teorema es cierto, incluso si $x \mapsto |Jg(x)|$ o $x \mapsto 1/|Jg(x)|$ no están acotadas sobre A y las integrales son impropias.

Paso 1. Comenzamos por probar el teorema en el caso más sencillo, aunque no del todo trivial: suponiendo que g es lineal, $f = 1$ y A es un conjunto con volumen:

Lema 7.12 Sean $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal, y $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con volumen. Entonces $L(A)$ tiene volumen, y

$$v(L(A)) = |\det L|v(A),$$

es decir,

$$\int_{L(A)} 1 = \int_A |\det L|.$$

Demostración: Nos bastaría con probar esto en el caso que L es isomorfismo lineal (es todo lo que se requiere para demostrar el teorema del cambio de variable), pero como el enunciado de este lema es cierto incluso cuando L no es isomorfismo, discutiremos también este caso. Si $\det L = 0$ entonces $L(A)$ está contenido en $L(\overline{A})$, que es compacto y a su vez está contenido en un

hiperplano de $\mathbb{R}^n$, luego $L(\overline{A})$ tiene medida y contenido cero, y la igualdad $v(L(A)) = |\det L|v(A)$ es trivial en este caso. Podemos suponer entonces que $\det L \neq 0$, es decir, L es un isomorfismo lineal.

Veamos primero que $L(A)$ tiene volumen si A lo tiene. Por el ejercicio 2.24 sabemos que una aplicación de clase C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ transforma conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula. En particular esto es cierto para una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por tanto, si A tiene volumen, ∂A tiene medida cero y $L(\partial A)$ también. Pero, como L es isomorfismo lineal, $\partial L(A) = L(\partial A)$, de modo que $\partial L(A)$ tiene medida cero y así $L(A)$ tiene volumen.

Para establecer la igualdad $v(L(A)) = |\det L|v(A)$, recordemos que si $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal, entonces existen aplicaciones lineales $L_1, \dots, L_N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $L = L_1 \circ \dots \circ L_N$ y cada L_k opera sobre cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ de una de las maneras siguientes:

- (a) Una coordenada de x se multiplica por una constante, y las demás coordenadas permanecen invariables;
- (b) Para ciertos i, j (fijos para cada L_k), se reemplaza la coordenada x_i por $x_i + x_j$, mientras que las otras coordenadas permanecen invariables.

Esto es equivalente a afirmar que cualquier matriz $n \times n$ se descompone como producto de matrices $n \times n$ cada una de las cuales es de uno de los dos tipos siguientes: o bien se obtiene de la matriz identidad sustituyendo un 1 de la diagonal por una constante c , o bien se obtiene a partir de la matriz identidad poniendo un uno en vez de un cero en cualquier lugar fuera de la diagonal principal.

Puesto que $\det L = \det L_1 \dots \det L_N$, basta probar el resultado para cada una de las L_k anteriores. Es decir, podemos suponer que L es de una de las formas (a) o (b) anteriores. En efecto, si $v(L_j(A)) = |\det L_j|v(A)$ para cada L_j y cada conjunto con volumen A entonces, aplicando este hecho reiteradamente, obtenemos que

$$v(L(A)) = |\det L_1| |\det L_2| \dots |\det L_N| v(A) = |\det L| v(A).$$

Veamos pues que si L es una aplicación lineal del tipo (a) o (b) anteriores y A es un conjunto con volumen entonces $v(L(A)) = |\det L|v(A)$. A tal fin, comenzamos considerando el caso especial en que A es un rectángulo,

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Si L es del tipo (a), es decir,

$$L(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, cx_i, \dots, x_n),$$

donde c es una constante, entonces es claro que $\det L = c$, y

$$L(A) = [a_1, b_1] \times \dots \times [ca_2, cb_2] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

si $c > 0$, y

$$L(A) = [a_1, b_1] \times \dots \times [cb_2, ca_2] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

cuando $c < 0$, luego $v(L(A)) = |c|v(A)$ en ambas situaciones, y el resultado se cumple para aplicaciones del tipo (a). Supongamos ahora que L es del tipo (b), es decir

$$L(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

entonces es obvio que $\det L = 1$, y por tanto sólo hay que probar que $v(A) = v(L(A))$ en este caso. Como

$$L(A) = \{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_j, x_{i+1}, \dots, x_n) : x_k \in [a_k, b_k]\},$$

entonces, utilizando el teorema de Fubini, obtenemos que

$$v(L(A)) = \left(\int_D 1_D dx_i dx_j \right) \prod_{k=1, k \neq i, k \neq j}^n (b_k - a_k),$$

donde $D = \{(x_j, x_i + x_j) \in \mathbb{R}^2 : x_j \in [a_j, b_j], x_i \in [a_i, b_i]\}$. Por tanto, tendremos lo que deseamos si probamos que

$$\int_D 1_D dx_i dx_j = (b_j - a_j)(b_i - a_i).$$

Es decir, en realidad basta con demostrar esto en el caso de $\mathbb{R}^2$, cuando $A = [a, b] \times [c, d]$ y $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está definida por

$$L(x, y) = (x, x + y).$$

Pero esto es ya un sencillo ejercicio que se deja al cuidado del lector (hágase un dibujo para convencerse de que $v(L(A)) = (b - a)(d - c) = v(A)$ si no se tiene ganas de calcular).

Este argumento prueba que $v(L(A)) = |\det L|v(A)$ cuando A es un rectángulo y L es una aplicación lineal del tipo (a) o (b). Veamos por último que esta igualdad sigue siendo cierta en el caso de que A es un conjunto cualquiera con volumen (y L sigue siendo de uno de esos dos tipos).

Sea S un rectángulo que contiene a A y tomemos $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como A tiene volumen existe una partición P de S tal que

$$U(1_A, P) - v(A) \leq \frac{\varepsilon}{|\det L|}, \quad \text{y} \quad v(A) - L(1_A, P) \leq \frac{\varepsilon}{|\det L|}.$$

Sean entonces $V = V_\varepsilon = \bigcup\{Q \in P : Q \subseteq A\}$, y $W = W_\varepsilon = \bigcup\{Q \in P : Q \cap A \neq \emptyset\}$. Por lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} v(L(V)) &= \sum_{Q \in P, Q \subseteq A} v(L(Q)) = \sum_{Q \in P, Q \subseteq A} |\det L|v(Q) = \\ |\det L|L(1_A, P) &\geq |\det L|v(A) - \varepsilon, \end{aligned}$$

y análogamente $v(L(W)) \leq |\det L|v(A) + \varepsilon$. Ahora, como $V \subseteq A \subseteq W$, tenemos que $L(V) \subseteq L(A) \subseteq L(W)$, y como ya sabemos que $L(A)$ tiene volumen, esto impone que

$$|\det L|v(A) - \varepsilon \leq v(L(V)) \leq v(L(A)) \leq v(L(W)) \leq |\det L|v(A) + \varepsilon,$$

y en particular $|\det L|v(A) - \varepsilon \leq v(L(A)) \leq |\det L|v(A) + \varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se deduce de aquí que $v(L(A)) = |\det L|v(A)$. $\square$

Paso 2. Veamos ahora que los difeomorfismos transforman conjuntos con volumen en conjuntos con volumen.

Lema 7.13 *Sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Si C es un conjunto con volumen tal que $\overline{C} \subset A$, entonces $g(C)$ también tiene volumen.*

Demostración: Como g es un difeomorfismo, $\partial g(C) = g(\partial C)$. Por el ejercicio 2.24 sabemos que una aplicación de clase C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ transforma conjuntos de medida nula en conjuntos de medida nula. Entonces, como ∂C tiene medida nula (puesto que C tiene volumen), resulta que $\partial g(C) = g(\partial C)$ tiene también medida nula, lo que significa que $g(C)$ tiene volumen. $\square$

Paso 3. Veremos que si $C \subset A$ es un conjunto cerrado y con volumen, entonces

$$v(g(C)) \leq \int_C |Jg|.$$

A tal fin, probaremos primero una versión aproximada de este hecho para el caso en que C es un cubo, de lo cual deduciremos el caso general.

Recordemos que la norma $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

tiene la propiedad de que para todos $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$,

$$B_\infty(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\|_\infty \leq r\} = [x_1 - r, x_1 + r] \times \dots \times [x_n - r, x_n + r],$$

es decir, la bola $B_\infty(x, r)$ es un cubo de centro x y lados de longitud $2r$. Obviamente, todo cubo C en $\mathbb{R}^n$ puede expresarse de esta manera para ciertos x y r . El siguiente lema nos da la clave de la demostración de este paso:

Lema 7.14 *Sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y K un compacto contenido en A . Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, si Q es un cubo de lados menores o iguales que δ y $x \in Q \cap K$, se tiene*

$$v(g(Q)) \leq (1 + \varepsilon)^n |\det g'(x)| v(Q).$$

Demostración: Como g' y $(g^{-1})'$ son continuas en el compacto K , ambas aplicaciones están acotadas en K , y por tanto existe una constante $M > 0$ tal que, para todo $x \in K$, los isomorfismos lineales $g'(x)$ satisfacen que

$$\frac{1}{M} \|z\|_\infty \leq \|g'(x)(z)\|_\infty \leq M \|z\|_\infty,$$

para todo $z \in \mathbb{R}^n$, lo cual equivale a decir que, para todo $x \in K$, y para todos $y \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$,

$$B_\infty(g'(x)(y), \frac{r}{M}) \subseteq g'(x)(B_\infty(y, r)) \subseteq B_\infty(g'(x)(y), Mr). \quad (1)$$

Por otra parte, como g es de clase C^1 en el compacto $K \subset A$, g es uniformemente diferenciable en K (ver problema 7.29), es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|g(y+h) - g(y) - g'(y)(h)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2M} \|h\| \quad (2)$$

para todos $y \in K$, $\|h\| \leq \delta_1$. Además, como g' es uniformemente continua en el compacto K , existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|g'(x) - g'(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

para todos $x, y \in K$ con $\|x - y\|_\infty \leq \delta_2$, lo que conlleva

$$\|g'(x)(h) - g'(y)(h)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2M} \|h\| \quad (3)$$

para todos $x, y \in K$, $h \in \mathbb{R}^n$, con $\|x - y\|_\infty \leq \delta_2$ y $\|h\| \leq \delta_2$. Ahora, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y combinando las desigualdades (2) y (3), tenemos que

$$\|g(y+h) - g(y) - g'(x)(h)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{M} \|h\|, \quad (4)$$

es decir, para todo $x, y \in K$ con $\|x - y\| \leq \delta$ y $\|h\| \leq \delta$, se tiene que

$$g(y + h) - [g(y) + g'(x)(h)] \in B_\infty(0, \frac{\varepsilon}{M}\|h\|) \subseteq g'(x)(B_\infty(0, \varepsilon\|h\|)),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} g(B_\infty(y, r)) &\subseteq g(y) + g'(x)(B_\infty(0, r)) + g'(x)(B_\infty(0, \varepsilon r)) \\ &\subseteq g(y) + g'(x)(B_\infty(0, r(1 + \varepsilon))) \end{aligned}$$

para todo $x, y \in K$ con $x \in B_\infty(y, r)$, $r \in (0, \delta)$, y por tanto, tomando volúmenes y teniendo en cuenta el paso 1,

$$\begin{aligned} v(g(B_\infty(y, r))) &\leq v(g(y) + g'(x)(B_\infty(0, r(1 + \varepsilon)))) = \\ &v(g'(x)(B_\infty(0, r(1 + \varepsilon)))) = |\det g'(x)|v(B_\infty(0, r(1 + \varepsilon))), \end{aligned}$$

y, como $v(B_\infty(z, t)) = (2t)^n$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$, esto equivale a

$$\begin{aligned} v(g(B_\infty(y, r))) &\leq |\det g'(x)|(2r)^n(1 + \varepsilon)^n = \\ &(1 + \varepsilon)^n|\det g'(x)|v(B_\infty(y, r)) \end{aligned}$$

para todo $y \in K$, $x \in K \cap B_\infty(y, r)$, $r \in (0, \delta)$. Esto prueba que, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo cubo Q de centro $y \in K$ cuyos lados midan menos que δ , y para todo $x \in K \cap Q$, se tiene

$$v(g(Q)) \leq (1 + \varepsilon)^n|\det g'(x)|v(Q).$$

Ahora ya podemos deducir el resultado principal del paso 3:

Lema 7.15 *Sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea C un cerrado con volumen contenido en A . Entonces,*

$$v(g(C)) \leq \int_C |Jg(x)|dx.$$

Demostración: Sea $s = \text{dist}_\infty(C, \partial A)$. Como C es un compacto contenido en el abierto A , se tiene $s > 0$. Sea $K = \{x \in A : \text{dist}_\infty(x, C) \leq s/2\}$; claramente K es un compacto contenido en A . Además, cualquier cubo Q de lados menores que $\delta_1 := s/2$, y cuya intersección con C sea no vacía, estará contenido en K .

Ahora, aplicamos el lema anterior (7.14) a nuestro compacto K : fijado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $\delta_2 > 0$ tal que, si Q es un cubo de lados menores o iguales que δ_2 y $x \in Q \cap K$, se tiene

$$v(g(Q)) \leq (1 + \varepsilon)^n|\det g'(x)|v(Q). \quad (5)$$

Por otro lado, como la aplicación $x \mapsto |Jg(x)|$ es continua en el compacto C , que tiene volumen, $|Jg|$ es integrable en C . Sea S un cubo que contenga a C . Al ser $|Jg|$ integrable en C , dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_3 > 0$ tal que para cualquier partición P de S en cubos $Q_1, \dots, Q_N$ cuyos lados miden menos que δ_3 , y $x_1 \in S_1, \dots, x_N \in S_N$ cualesquiera, se tiene que

$$\left| \int_C |Jg| - \sum_{i=1}^N |Jg(x_i)| 1_C(x_i) v(Q_i) \right| \leq \varepsilon,$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^N |Jg(x_i)| 1_C(x_i) v(Q_i) \leq \int_C |Jg| + \varepsilon. \quad (6)$$

Sea ahora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Fijemos P una partición cualquiera de S en cubos de lados menores o iguales que δ , y sea

$$P_c = \{Q \in P : Q \cap C \neq \emptyset\}.$$

Para cada $Q \in P$ escojamos $x_Q \in Q$ de tal manera que $x_Q \in Q \cap C$ cuando $Q \in P_c$. Como $\delta \leq \delta_1 = s/2$, se tiene $x_Q \in Q \subseteq K$ para todo $Q \in P_c$, y entonces, por (5) y (6),

$$v(g(Q)) \leq (1 + \varepsilon)^n |Jg(x_Q)| v(Q), \quad \text{y} \quad \sum_{Q \in P_c} |Jg(x_Q)| v(Q) \leq \int_C |Jg| + \varepsilon$$

para todo $Q \in P_c$.

Entonces, aplicando el paso 3 y el teorema 4.1(vii), obtenemos que

$$\begin{aligned} v(g(C)) &= v\left(\bigcup_{Q \in P} g(C \cap Q)\right) = \sum_{Q \in P} v(g(C \cap Q)) = \sum_{Q \in P_c} v(g(C \cap Q)) \\ &\leq \sum_{Q \in P_c} v(g(Q)) \leq \sum_{Q \in P_c} (1 + \varepsilon)^n |Jg(x_Q)| v(Q) \\ &= (1 + \varepsilon)^n \sum_{Q \in P_c} |Jg(x_Q)| 1_C(x_Q) v(Q) \leq (1 + \varepsilon)^n \left(\int_C |Jg| + \varepsilon \right), \end{aligned}$$

es decir

$$v(g(C)) \leq (1 + \varepsilon)^n \left(\int_C |Jg| + \varepsilon \right). \quad (8)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que en todo este razonamiento $\varepsilon > 0$ es arbitrario e independiente de C , haciendo tender ε a cero en la desigualdad (8), obtenemos lo que deseabamos: $v(g(C)) \leq \int_C |Jg|$.

Paso 4. Lo más duro de la demostración del teorema del cambio de variables ya ha pasado, y estamos en condiciones de probar el teorema para cualquier subconjunto cerrado y con volumen de A :

Lema 7.16 *Sea $g : A \longrightarrow B$ un difeomorfismo C^1 entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea C un subconjunto cerrado y con volumen de A . Entonces, para toda función $f : g(C) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable,*

$$\int_{g(C)} f = \int_C (f \circ g) |Jg|.$$

Demostración: Como las aplicaciones $x \mapsto |Jg(x)|$ y $x \mapsto 1/|Jg(x)|$ son continuas en los compactos C y $D = g(C)$ respectivamente, ambas están acotadas en dichos conjuntos, que además tienen volumen (paso 2), y por tanto $|Jg|$ es integrable en C y $|Jg^{-1}| = 1/|Jg|$ es integrable en D . Además, si S es un rectángulo que contiene a C y $D(f)$ es el conjunto de discontinuidades de la extensión canónica de f a S , es claro que $D(f) \subset B$ y $D(f)$ tiene medida cero (por ser f integrable en $g(C)$), luego, como $g^{-1} : B \longrightarrow A$ es de clase C^1 , se tiene que $g^{-1}(D(f))$ tiene medida cero (ejercicio 2.24). Pero, como g es un difeomorfismo, $g^{-1}(D(f))$ es precisamente el conjunto de discontinuidades de $f \circ g$, denotado por $D(f \circ g)$. Por tanto $D(f \circ g)$ tiene medida cero, y así $f \circ g$ es integrable en C .

Sea S un rectángulo que contenga a $g(C)$, y extiéndase f a S poniendo $f = 0$ en $S \setminus g(C)$ como de costumbre. Sea P una partición cualquiera de S en subrectángulos $S_1, \dots, S_N$. Utilizando el resultado del paso anterior y el hecho evidente de que $m(f, S_i) = m(f \circ g, g^{-1}(S_i))$, así como el teorema 4.1(vii), tenemos que

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{i=1}^N m(f, S_i) v(S_i) = \sum_{i=1}^N m(f, S_i) v(g(g^{-1}(S_i))) \\ &\leq \sum_{i=1}^N m(f, S_i) \int_{g^{-1}(S_i)} |Jg| = \sum_{i=1}^N \int_{g^{-1}(S_i)} m(f, S_i) |Jg| \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{g^{-1}(S_i)} m(f \circ g, g^{-1}(S_i)) |Jg| \leq \sum_{i=1}^N \int_{g^{-1}(S_i)} (f \circ g) |Jg| = \\ &= \int_{g^{-1}(S)} (f \circ g) |Jg| = \int_{g^{-1}(g(C))} (f \circ g) |Jg| = \int_C (f \circ g) |Jg|, \end{aligned}$$

es decir,

$$L(f, P) \leq \int_C (f \circ g) |Jg|.$$

Como esto vale para cualquier partición P de S y f es integrable en $g(C)$, se deduce que

$$\int_{g(C)} f \leq \int_C (f \circ g) |Jg|. \quad (9)$$

Por supuesto, todo lo que se ha hecho hasta ahora, y en particular esta última desigualdad, se puede aplicar al difeomorfismo $g^{-1} : B \rightarrow A$ en lugar de g , y a cualquier función integrable $h : C = g^{-1}(g(C)) \rightarrow \mathbb{R}$. Así pues, si ponemos g^{-1} en lugar de g y $h = (f \circ g) |Jg|$ en lugar de f en la desigualdad (9), obtenemos

$$\int_C (f \circ g) |Jg| \leq \int_{g(C)} (f \circ g \circ g^{-1}) (|Jg| \circ g^{-1}) |Jg^{-1}| = \int_{g(C)} f, \quad (10)$$

ya que $g \circ g^{-1} = I$, luego $I = (g' \circ g^{-1}) \circ (g^{-1})'$, donde I es la aplicación identidad, y tomando determinantes, $1 = (|Jg| \circ g^{-1}) |Jg^{-1}|$.

Finalmente, combinando las desigualdades (9) y (10) obtenemos el resultado que buscábamos:

$$\int_{g(C)} f = \int_C (f \circ g) |Jg|.$$

Paso 5. Para terminar este capítulo veremos que el teorema del cambio de variables es cierto tal y como está enunciado, incluso si $x \mapsto |Jg(x)|$ o $x \mapsto 1/|Jg(x)|$ no están acotadas sobre A y las integrales son impropias.

Sea (K_n) una sucesión cualquiera de compactos con volumen tales que

$$K_n \subseteq K_{n+1} \text{ para todo } n, \text{ y } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Por el teorema 6.3), para probar que $(f \circ g) |Jg|$ es integrable en A (quizás impropia) y que $\int_A (f \circ g) |Jg| = \int_B f$, basta ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} (f \circ g) |Jg| = \int_B f.$$

Ahora bien, como $g : A \rightarrow B$ es un difeomorfismo, $(g(K_n))$ es una sucesión de compactos con volumen tales que

$$g(K_n) \subseteq g(K_{n+1}) \text{ para todo } n, \text{ y } B = \bigcup_{n=1}^{\infty} g(K_n).$$

Entonces, como f es integrable (quizás impropia) sobre B , esto implica (otra vez por el teorema 6.3) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{g(K_n)} f = \int_B f;$$

pero, por el resultado del paso anterior,

$$\int_{g(K_n)} f = \int_{K_n} (f \circ g) |Jg|;$$

luego, combinando estas dos últimas igualdades obtenemos lo que deseamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} (f \circ g) |Jg| = \int_B f.$$

Problemas

7.17 Determinar el área de la región acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$ e $y = 2x^2$, por medio del cambio de variables $u = xy$, $v = y/x^2$.

7.18 Hallar el volumen de la región determinada por la intersección del cono sólido $z^2 \geq x^2 + y^2$ y la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

7.19 Usar coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido T limitado superiormente por el plano $z = y$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

7.20 Demostrar que el volumen de un cono circular de radio de la base r y altura h es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

7.21 Calcular

$$\int_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

donde D es la bola unidad de $\mathbb{R}^3$.

7.22 Utilizando coordenadas polares, calcular las integrales:

(a) $\int_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $\int_D |x + y| dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- (c) $\int_D \log(x^2 + y^2) dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- (d) $\int_D (x^2 + y^2)^{-3} dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$.

- 7.23** (a) Hallar el área limitada por las curvas en polares: $\rho = a \cos \theta$ y $\rho = a(1 + \cos \theta)$; ($a > 0$).
- (b) Hallar el área limitada por la curva en polares: $\rho = a|\sin 3\theta|$; ($a > 0$).
- (c) Hallar el área limitada por la lemniscata: $(x^2 + y^2)^2 = 2a(x^2 - y^2)$; ($a > 0$).

7.24 Se considera la transformación $\phi(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$; sea $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u^2 + v^2 \leq 9, u \geq 0, v \geq 0\}$. Determinar el conjunto $\phi(D)$ y calcular su área. *Indicación:* ¿Qué es $\phi(z)$ cuando $z = u + iv$ es un número complejo?

7.25 Se considera la transformación $\phi(u, v) = (x = u + v, y = v - u^2)$; sea D el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$ en el plano (u, v) . Comprobar que ϕ es un cambio de variables alrededor de D . Determinar el conjunto $\phi(D)$ y calcular su área.

7.26 Utilizando cambios de variable, calcular:

- (a) $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 2 \leq xy \leq 4\}$.
- (b) $\int_D \frac{x}{4x^2 + y^2} dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq 4x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- (c) $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \leq 1, |y| \geq 1\}$.

7.27 Calcular:

- (a) $\int_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2z \leq 4\}$.
- (b) $\int_V z dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
- (c) $\int_V z(x + y) dx dy dz$, donde V está limitado por: $z = 0$, $z = a$, $xy = a^2$, $2(x + y) = 5a$, ($a > 0$).

- (d) $\int_V e^x dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- (e) $\int_V z \sin(x^2 + y^2) dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq (R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}\}$, ($R > 0$).
- (f) $\int_V |z| dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z^2 \leq x^2\}$.
- (g) $\int_V (x^2 + y^2 + z^2)^{-2} dx dy dz$, donde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$.

7.28 Calcular el volumen de los cuerpos siguientes:

- (a) El cuerpo limitado por los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$.
- (b) El cuerpo limitado por la superficie $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 2$ y $z = 4$.
- (c) El cuerpo limitado por una esfera de radio R y un cono de ángulo en el origen 2α , si el vértice del cono está en el centro de la esfera.
- (d) El cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $(x - a/2)^2 + y^2 = a^2/4$.
- (e) El cuerpo limitado por las superficies $x + y = z$; $xy = 1$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$.

7.29 Se dice que una aplicación $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es *uniformemente diferenciable en* $U \subseteq A$ si es diferenciable y además, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|g(y) - g(x) - g'(x)(y - x)\| \leq \varepsilon \|y - x\|$$

para todos x, y con $x \in U$, $\|y - x\| \leq \delta$.

Probar que si $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase C^1 entonces, para todo subconjunto compacto $K \subset A$, g es uniformemente diferenciable en K .

Indicación: Reducirlo al caso de una función que g que tome valores escalares. Utilizar el teorema del valor medio y que la derivada g' es uniformemente continua en el compacto K .

7.30 Calcular, mediante una transformación previa de coordenadas, las integrales:

- (a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx$ (a cilíndricas).
- (b) $\int_0^{2R} \int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz dy dx$ (a esféricas).

7.31 Hacer un cambio de variables a coordenadas polares y usar los teoremas sobre integrales impropias para calcular $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$. Después, utilizar el teorema de Fubini para probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

7.32 Enunciar y probar una versión del teorema del cambio de variables para difeomorfismos C^1 entre abiertos posiblemente no acotados e integrales impropias.

7.33 ¿Para qué valores de p es la función

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^p$$

integrable sobre B , donde B es la bola unidad euclídea de $\mathbb{R}^3$? ¿Para cuáles lo es sobre $\mathbb{R}^3 \setminus B$?

7.34 Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ la bola unidad abierta en el plano. Hallar el valor de las siguientes integrales impropias:

(a) $\int_A [1 - \sqrt{x^2 + y^2}]^p dx dy$, para $p < -1$.

(b) $\int_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$.

7.35 Deducir fórmulas para el volumen de cuerpos de revolución en $\mathbb{R}^3$. Después calcular el volumen del toro engendrado al girar una circunferencia de radio r y centro $(a, 0, 0)$ situada en el plano $y = 0$ alrededor del eje z (se supone $0 < r < a$).