



FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA2001-6 Cálculo en Varias Variables

Profesor: Matías Godoy Campbell

Auxiliares: Cristian Palma y Arie Wortsman

Auxiliar 14

Repaso C3

- P1** a) Demuestre que el máximo de la función $x^2y^2z^2$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ es $(a^2/3)^3$, y que el mínimo sobre de la función $x^2 + y^2 + z^2$ sobre la superficie $x^2y^2z^2 = (a^2/3)^3$ es a^2 .
- b) Considere la superficie $F(p) = 0$ y un punto q_0 fuera de ella, donde $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ y $\nabla F(p) \neq 0 \forall p \neq 0$. Encuentre la condición que debe satisfacer un punto $p \in S$ que esté a mínima distancia de q_0 . Interprete geoméricamente.

- P2** Sean p, q dos números reales tales que $p > 1$, $q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

- a) Encuentre el mínimo de la siguiente función, bajo la restricciones: $xy = 1$, $x > 0$, $y > 0$.

$$f(x, y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

- b) Pruebe que, para todos $a, b > 0$:

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

- P3** Encuentre el máximo y el mínimo, si existe, de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$, en la elipse definida por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ con el plano $y + z = 1$.

- P4** Demuestre que los siguientes conjuntos son convexos:

- $A \cap B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ convexos
- $D = \{(x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq s \leq g(x)\}$, donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cóncava.

- P5** a) Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Calcule su volumen por integración múltiple.
- b) Determine, mediante integración múltiple, el volumen del cuerpo:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x \leq y \leq 2x + 1, 1 - 2x \leq y \leq 8 - x, 0 \leq z \leq y - 2x\}$$

- c) Encuentre el volumen del sólido $\mathcal{D}$ encerrado por los planos:

$$4x + 2y + z = 10, \quad y = 3x, \quad z = 0, \quad x = 0$$

P6 a) Calcule:

$$\int_0^1 \int_y^1 (x - y) \sin(x^3) dx dy$$

b) Calcule:

$$\int_{-1}^1 \int_{\frac{y}{2}}^1 y \exp(x^3) dx dy$$

En función de $C = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(x^3) dx$

c) Calcule:

$$I = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^1 \int_0^x \exp(-y^2) dy dx$$

En función de $A = \int_0^1 \exp(-t^2) dt$, $B = \int_0^{\frac{1}{2}} \exp(-t^2) dt$