



FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Matías Godoy Campbell
Auxiliares: Cristian Palma y Arie Wortsman

Auxiliar 12

Integración en Rectángulos

P1 Usando el siguiente lema, demuestre el teorema:

Lema. Sea $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua, con K compacto $\Rightarrow f$ es uniformemente continua.

Teorema. Sea $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, R rectángulo y f continua $\Rightarrow f$ es Riemann Integrable en R .

P2 a) Sea f una función continua sobre un rectángulo $R \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que:

$$\left(\min_{x \in R} f(x) \right) \text{Vol}(R) \leq \int_R f \leq \left(\max_{x \in R} f(x) \right) \text{Vol}(R)$$

Indicación: Use suma inferior y superior de Riemann.

b) Si $f(x, y) = \exp(\sin(x + y))$ y $R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, mostrar que:

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_R f \leq e$$

P3 [Propuesto]

- a) Usando sumas de Riemann, demuestre que la función $f(x, y) = 3x^2 + 2y$ es integrable sobre el dominio $\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$
- b) Considere la partición R_n equiespaciada del rectángulo $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Demuestre, usando la definición de integrabilidad o una forma equivalente, que la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es integrable en el rectángulo R .

P4 Sea $R = [0, 1] \times [0, 2]$, utilizando sumas de Riemann encuentre: $\iint_R x e^y$

P5 Calcule $\int_T \exp(x + y)$ donde T es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.

P6 Pruebe las siguientes propiedades de la Integral de Riemann:

Teorema. Sean $f, g : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann Integrables, R rectángulo, entonces:

I) *Monotonía:* $\forall x \in R, f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_R f \leq \int_R g$

II) *Valor Absoluto:* $|f|$ es RI $\wedge \left| \int_R f \right| \leq \int_R |f|$

Integración en Rectángulos

Definición (Rectángulo). $R \subseteq \mathbb{R}^n$ rectángulo $\iff \exists a, b \in \mathbb{R}^n, \forall i \in I_n, a_i \leq b_i \wedge R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$

Notación. Volumen: $Vol(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

Definición (Reticulado). $R \subseteq \mathbb{R}^n$ rectángulo, $S = \{R_i\}_{i \in I}$ familia de rectángulos

$$S \text{ reticulado de } R \iff R = \bigcup_{i \in I} R_i \wedge \forall i, j \in I, i \neq j, \text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$$

Definición (Suma Inferior y Superior). $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, $S = \{R_i\}_{i \in I}$ reticulado de R rectángulo

$$s(f, S) = \sum_{i \in I} m_i \cdot Vol(R_i), \text{ con } m_i = \inf_{x \in R_i} f(x) \wedge S(f, S) = \sum_{i \in I} M_i \cdot Vol(R_i), \text{ con } M_i = \sup_{x \in R_i} f(x)$$

Definición (Reticulado más Fino). S_1, S_2 reticulados de $R \subseteq \mathbb{R}^n$ rectángulo

$$S_2 \text{ es más fino que } S_1 \iff \forall R_2 \in S_2, \exists R_1 \in S_1, R_2 \subseteq R_1$$

Definición (Refinamiento). $S_1 = \{R_i\}_{i \in I}, S_2 = \{R_j\}_{j \in J}$ reticulados de $R \subseteq \mathbb{R}^n$ rectángulo

$$S_2 \wedge S_1 = \{R' \subseteq \mathbb{R}^n / \exists i \in I, \exists j \in J, R' = R_i \cap R_j\}$$

Observación. $S_1 \wedge S_2$ es reticulado de R y es más fino que S_1 y S_2

Proposición 1. $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, S_1, S_2 reticulados de R rectángulo

$$S_2 \text{ más fino que } S_1 \Rightarrow s(f, S_1) \leq s(f, S_2) \leq S(f, S_2) \leq S(f, S_1)$$

Corolario 1. S_1, S_2 reticulados de $R \Rightarrow s(f, S_1) \leq S(f, S_2)$

Definición (Integral Inferior y Superior). $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, R rectángulo

$$\int_{\underline{R}} f = \sup\{s(f, S) / S \text{ reticulado de } R\} \wedge \overline{\int}_R f = \inf\{S(f, S) / S \text{ reticulado de } R\}$$

Proposición 2. $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, R rectángulo $\Rightarrow \int_{\underline{R}} f \leq \overline{\int}_R f$

Definición (Riemann Integrable). $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, R rectángulo

$$f \text{ Riemann Integrable} \iff \int_{\underline{R}} f = \overline{\int}_R f$$

Notación. $\int_R f = \int_{\underline{R}} f = \overline{\int}_R f$

Teorema (Condición de Riemann). $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, R rectángulo

$$f \text{ Riemann Integrable} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists S \text{ reticulado de } R, S(f, S) - s(f, S) < \varepsilon$$

Teorema (Caracterización de Integrabilidad). $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, R rectángulo

$$f \text{ Riemann Integrable} \iff \exists (S_n) \text{ sucesión de reticulados de } R, \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, S_n) - s(f, S_n) = 0$$

Observación. $\int_R f = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, S_n)$