MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Matías Godoy Campbell
Auxiliares: Cristian Palma y Arie Wortsman

Auxiliar 10

Función Implícita y Optimización

P1 Usted se encuentra caminando por un parque cuando en la lejanía divisa al más tierno ejemplar de su animal favorito tomando una siesta. A un costado, observa que se extiende un bosque cuyo linde (o borde) traza una curva de ecuación $g(x, y) = 0$. En los árboles de este bosque crecen los más exóticos y variados frutos entre los cuales se encuentra el preferido del animal en cuestión; para sorprenderlo, usted decide ir hasta el bosque y coger uno de estos frutos para luego regalárselo. Pero, dado que podría despertar e irse en cualquier momento, usted decide que debe encontrar la forma más rápida de hacer el viaje primero hasta el límite del bosque y luego hasta el animal. Suponga que el parque es completamente plano y que el tiempo que le tomará recoger el fruto es despreciable en comparación a lo que le tomará hacer el trayecto, es decir, usted puede tomar el alimento instantáneamente. Note además que sin pérdida de generalidad puede suponer que al momento de divisar al animal usted se encuentra en el origen y que éste tiene coordenadas (x_a, y_a).

a) Escriba el problema de optimización con restricciones que debe resolver para encontrar la forma más rápida de hacer el recorrido.

b) Suponga ahora que el borde del bosque es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

1) Pruebe que los puntos críticos del problema se encuentran sobre la recta que pasa por el origen y el punto (x_a, y_a).

2) Usando la parte (1) determine los puntos críticos del problema. Evaluando la función objetivo en estos puntos, muestre que el óptimo tiene coordenadas:

$$x^* = \frac{rx_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}, y^* = \frac{ry_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$$

P2 *a*) Probar que el sistema:

$$y^2 + z^2 - x^2 + 2 = 0$$

$$yz + xz - xy - 1 = 0$$

define dos funciones implícitas $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno del punto $(2, 1, 1)$.

b) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$. Hallar la variación de la función $F(x, y, z) = xz - z^2xyz + y^2$ en el punto $(2, 1, 1)$ según $\alpha(\cdot)$ [Es decir, derivar la función de una variable $F(\alpha(x))$].

c) Comprobar que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define una función implícita $z = z(x, y)$ en un entorno del punto $(2, 1, 1)$ y que $(x, y) = (2, 1)$ es un punto crítico de $z(x, y)$.

P3 Resuelva el problema de optimización:

$$\begin{cases} min f(x, y) = 4x^2 + 10y^2 \\ s.a\ x \in \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4)\} \end{cases}$$

P4 Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$, para $c \in \mathbb{R}$, considere la ecuación descrita por $F(x, y, z) = c$. Sea $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un punto en la superficie tal que $\dfrac{\partial F}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$. Pruebe que el plano tangente a la superficie en dicho punto corresponde a la ecuación:

$$\langle \nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}, z - \bar{z}) \rangle = 0$$

TFI y Optimización con Restricciones

Definición (DP Matriciales)**.** Sea $f : \Omega \times \Lambda \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega \times \Lambda$

$$D_x f(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

$$D_y f(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_m} \right) \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$$

Teorema (Teorema de la Función Implícita)**.** *Sea* $f : \Omega \times \Lambda \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega \times \Lambda$ *abierto*

$$f \in C^1(\Omega \times \Lambda) \wedge D_y f(\bar{x}, \bar{y}) \text{ invertible } \wedge f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Rightarrow \exists U \subseteq \Omega : \bar{x} \in U \text{ abierto } \wedge \exists! \phi : U \to \Lambda, \\ \phi \in C^1(U), \forall x \in U : f(x, \phi(x)) = 0$$

Observación. $\forall x \in U,\ D\phi(x) = -D_y f(x, \phi(x))^{-1} D_x f(x, \phi(x))$

Definición (Mínimo local bajo Restricción)**.** Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $x^* \in \Omega$, $g(x^*) = 0$

$$x^* \text{ mín bajo restricciones } g \iff \exists U \subseteq \Omega,\ x^* \in U \text{ abierto } \wedge \forall x \in U,\ g(x) = 0 \Rightarrow f(x^*) \leq f(x)$$

Definición (Lagrangeano)**.** Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g : \Omega \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \Omega \times R^m &\to \mathbb{R}^m \\ (x, \lambda) &\to \mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^t g(x) \end{aligned}$$

Teorema (Multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean* $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g : \Omega \to \mathbb{R}^m,\ x^* \in \Omega,\ g(x^*) = 0$

$$x^* \textit{ mín local bajo restricciones } g \wedge \{\nabla g_i(x^*)\}_{i=1}^m \textit{ li },\ f, g \in C^1(\Omega) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^m, (x^*, \lambda) \textit{ mín local de } \mathcal{L}$$