MA2001-5 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ángel Pardo.
Auxiliar: Felipe Lopecillo Rocabado y Sebastián Bustos

Auxiliar Extra Examen

P1. ***Calculo Diferencial - Regla de la cadena***
Las coordenadas elípticas se definen por las ecuaciones $x(u,v) = senh(u) \cdot sen(v)$, $y(u,v) = cosh(u) \cdot cos(v)$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Su representación elíptica es la función:

$$g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$$

a) Demuestre que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))cosh(u)\cdot sen(v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))senh(u)\cdot cos(v) \\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))senh(u)\cdot cos(v) - \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))cosh(u)\cdot sen(v)
\end{aligned}$$

b) Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ en términos de las derivadas parciales de f y demuestre que el laplaciano en este sistema de coordenadas se calcula como:

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right](x(u,v),y(u,v)) = \frac{1}{\text{sen}^2(v) + senh^2(u)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

P2. ***Optimización - Sin restricciones***
Encuentre y clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones, determinando en cada caso si los óptimos encontrados son globales:

a) $f(x,y) = 3x^3 - y^2 - 9x - 6y + 1$

b) $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz$

P3. ***Optimización - Con restricciones***
En economía, un problema estándar de consumo-ahorro en tres períodos de tiempo, consiste en maximizar la utilidad total, escogiendo la mejor estrategia de consumos (c_1, c_2, c_3) de cada período y de ahorros (a_1, a_2) donde a_i representa el ahorro del período i que será usado en el período $i+1$. Aqui suponemos que la utilidad total de está dada por la función:

$$u(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2) = \ln(c_1) + \beta \ln(c_2) + \beta^2 \ln(c_3)$$

donde $\beta \in (0,1)$ es un parámetro conocido.
Los consumos y los ahorros están sujeto a las 3 restricciones que se detallan acontinuación:

Período 1: Durante este périodo hay dos ingresos conocidos: un ahorro previo $a_0 \geq 0$, el cual ha ganado intereses a tasa r, más una mesada $w > 0$. O sea el ingreso total de este período es $(w + (1+r)a_0)$. Estos ingresos se deben distribuir estratégicamente entre el consumo c_1 y el ahorro a_1, que será depositado para ser usado en el período siguiente. Por lo tanto:

$$a_1 + c_1 = w + (1+r)a_0$$

Período 2: En este período, los 2 ingresos son el ahorro guardado del período 1, el cual ganó intereses, y la nueva mesada $w > 0$ del período (que suponemos es igual que la anterior). Por lo tanto:

$$a_2 + c_2 = w + (1+r)a_1$$

Período 3: Los ingresos son análogos al período 2, pero por ser el último, no hay ahorro para el futuro. O sea el ingreso se consume completamente, es decir:

$$c_3 = w + (1+r)a_2$$

a) Escriba el problema en la forma clásica, es decir,

$$\begin{array}{rll} \text{maximizar} & f(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2) & \\ \text{s.a} & g_1(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2) & = 0 \\ & g_2(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2) & = 0 \\ & g_3(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2) & = 0 \end{array}$$

explicitando todas las funciones.

b) Explicite el Lagrangiano del problema en la forma $L(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

c) Escriba las condiciones de primer orden con respecto a las variables a_1 y a_2 para deducir que los multiplicadores de Lagrange se despejan en términos de λ_3, siguiendo una progresión geométrica.

d) Escriba las condiciones de primer orden con respecto a c_1, c_2, c_3 para despejar estas variables en términos de λ_3

e) Use las restricciones del problema para despejar los ahorros en términos de λ_3. Calcule $\frac{1}{\lambda_3}$ en término de los datos y encuentre los consumos y ahorros óptimos. ¿Pueden ser los 3 consumos óptimos iguales? En caso de que su respuesta sea afirmativa diga cuando se cumple.

P4. ***Calculo Integral - Integral Normal***

Calcule:

a)

$$\int_G x^2 dxdy$$

Donde $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

b)

$$\int_1^4 \int_y^4 \int_0^z \frac{z}{x^2 + z^2} dxdzdy$$

P5. ***Calculo Integral - Fubini***

Calcule:

$$\int_{-1}^0 \int_{-1}^y y\sqrt{x^2 + y^2} dxdy$$

P6. ***Calculo Integral - Teorema de Cambio de Variable***

Sea $f(x, y, z) = x + y + z$ y $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$ Calcule la integral:

$$\int_D f$$