MA2001-5 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ángel Pardo.
Auxiliar: Felipe Lopecillo Rocabado y Sebastián Bustos

Auxiliar 13 - $Fubini^{Fubini}$

P1. ***Fubini - Conmutar***

Calcular $\int_1^2 \int_0^1 \int_0^{y-1} dzdxdy$ en forma directa y también en el orden $dydxdz$ verificando a posteriori que ambos resultados son el mismo.

P2. ***Fubini - Calculo de dioses***
Calcule:

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3} dxdydz$$

P3. ***No contradice un teorema por que es teorema***

Considere la función:

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

y las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 g(x,y)dydx, \;\; I_2 = \int_0^1 \int_0^1 g(x,y)dxdy$$

Calcule I_1, I_2 ¿Contradice algún teorema visto en clase?. **Indicación:** Puede ser util considerar la siguiente función:

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

P4. ***Corolario Fubini: Regla de Leibnitz***

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Sean $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ entonces:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx\right) = f(b(t),t)\cdot b'(t) - f(a(t),t)\cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

Para demostrar lo anterior considere los siguientes pasos:

a) Considere el caso particular en que a y b son constantes; es decir demuestre que se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(x,t)dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$$

Indicación: Recuerde que $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ y que $\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)$ si f continua.

b) Considere la siguiente función:

$$F(t,y) = \int_c^y f(t,x)dx \text{ para } c \in \mathbb{R} \text{ fijo}$$

Y utilizando lo anterior concluya lo pedido. **Hint:** Al ser f de clase $\mathcal{C}^1$ se tiene que F es diferenciable, puede usarlo sin demostrarlo.

P5. ***¿TFC?***

Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Se define la función $I_f : H_+ \to \mathbb{R}$ como:

$$I_f(x) = \int_{D(x)} f$$

donde $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}\}$ y $D(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 \leq y_i \leq x_i \ \forall i \in \{1, ..., n\}\}$.

El objetivo es demostrar que I es diferenciable y encontrar sus derivadas parciales. Para esto realice lo siguiente:

a) Para $n = 2$ calcule $\frac{\partial I_f(x_1,x_2)}{\partial x_2}$

b) **[Propuesto]** Proponga el valor de $\frac{\partial I_f(x)}{\partial x_n}$ y demuestre su conjetura.

c) Justifique porque al saber $\frac{\partial I_f(x)}{\partial x_n}$ en realidad sabemos cuanto vale $\frac{\partial I_f(x)}{\partial x_i}$ con $i = 1, ..., n$ **Indicación:** Recuerde algún teorema visto en clase

d) Justifique por que $\frac{\partial I_f(x)}{\partial x_i}$ son continuas.

e) Concluya lo pedido.

f) A partir de lo anterior calcule:

$$\frac{\partial^n I_f(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

Indicación: De ser necesarió puede usar los resultados de la $P4$

P6. ***Corolario Fubini: Teorema de las derivadas cruzadas***

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. El objetivo de este problema es demostrar el teorema de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

utilizando el teorema de Fubini. Para ello:

a) Defina la función:

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Pruebe que g es integrable sobre un rectángulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$

b) Demuestre que una función continua es nula si y solo si su integral sobre cualquier rectángulo es nula.

c) Concluya el resultado pedido.