P1)

calcular $\int_1^2 \int_0^1 \int_0^{y-1} dz\,dx\,dy$

de forma directa y también en el orden $dy\,dx\,dz$ verificando a posterior; que ambos resultados son iguales

Sol)

$$\int_1^2 \int_0^1 \int_0^{y-1} dz\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 \left(z \Big|_0^{y-1} \right) dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 (y-1)\,dx\,dy$$

Scanned by CamScanner

$$= \int_1^2 (y-1) \int_0^1 dx \, dy$$

$$= \int_1^2 (y-1) \left(x \Big|_0^1 \right) dy$$

$$= \int_1^2 y-1 \, dy$$

$$= \frac{y^2}{2} - y \Big|_1^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - 2 - \left[\frac{1^2}{2} - 1 \right]$$

$$= \frac{4}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1$$

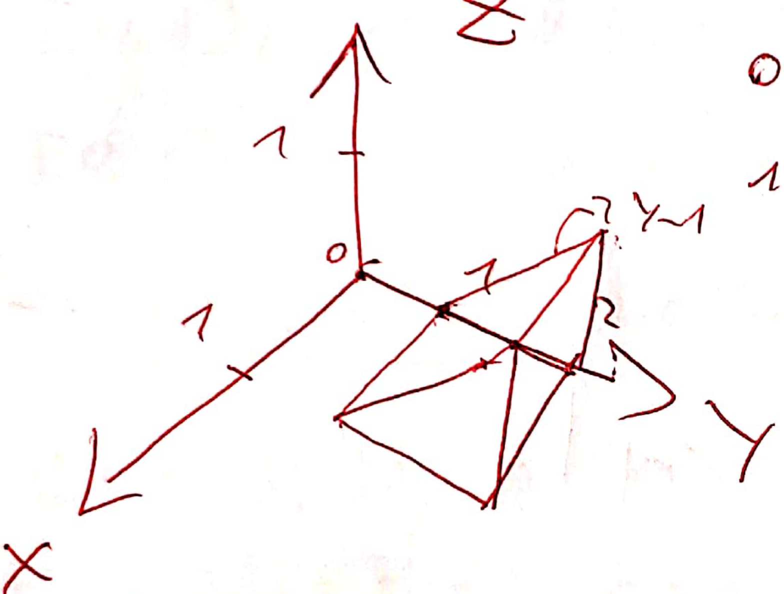
$$= 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = 1/2$$

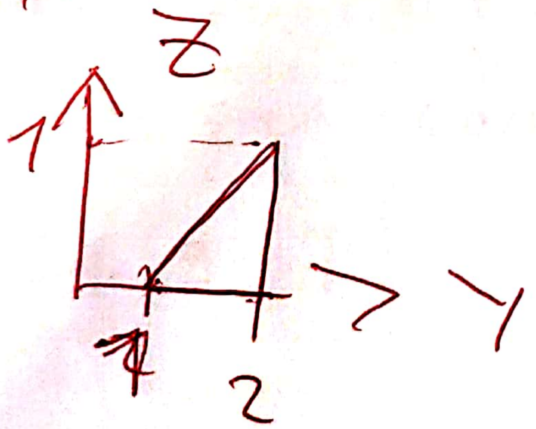
ara integrar en dy dx dZ tenemos que vizualizar el dominio de integración

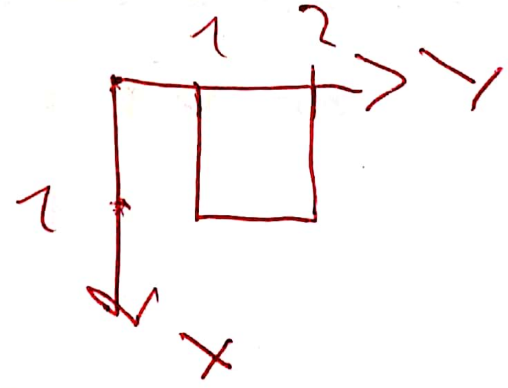
$0 \le z \le y-1$

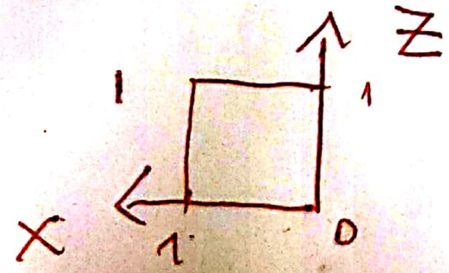
$0 \le x \le 1$

$1 \le y \le 2$









ahora quiero integrar

dy dx dz así que

Primero de derecha a izquierda

estudiamos dependencia

$z \in [0,1]$ no depende de nada

$x \in [0,1]$ no depende de z

$y \rightarrow$ depende de z

ya que si parto en $y=1$ puedo

llegar a $z+1$ como mucho

$\Rightarrow y = z+1$ como cota así

$y \in [1, z+1]$

Si

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_1^{z+1} dy\, dx\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 y \Big|_1^{z+1} dx\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 ((z+1) - 1)\, dx\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 z\, dx\, dz$$

$$= \int_0^1 z \left(\int_0^1 dx\right) dz$$

$$= \int_0^1 z \; x\Big|_0^1 dz = \int_0^1 z\, dz = 1/2$$

Y ∴ son iguales las integrales //

Scanned by CamScanner

P2 | Calcule

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,dx\,dy\,dz$$

Sol |

como e^{x^3} no tiene primitiva usamos fubini.

metodo 1: graficar

metodo 2: analitico

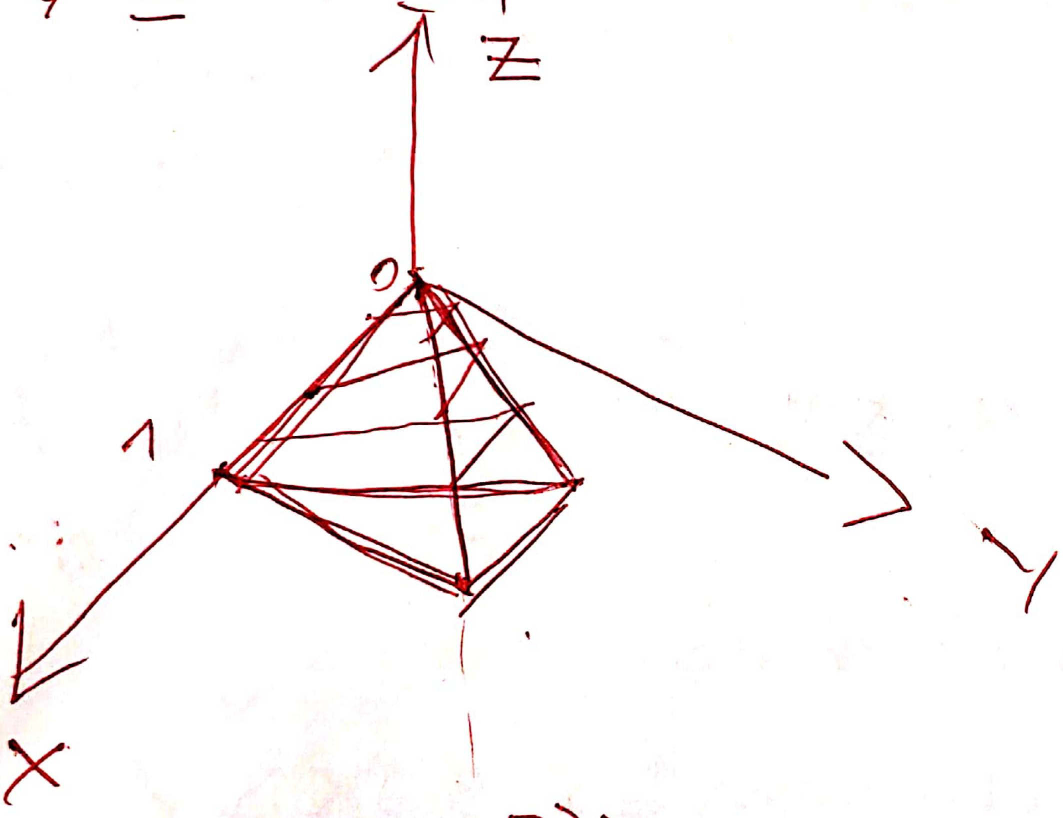
Scanned by CamScanner

metodo 1

notamos

$0 \leq z \leq 1, \quad z \leq y \leq 1$

$y \leq x \leq 1$



$\rightarrow y = x$

Si la idea eintuición es dejar el orden dzdydx ya que e^{x^3} solo depende de x, así vez la variable z esta acotada por y ∴ es útil tener la dependente de y así;

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y e^{x^3} \, dz \, dy \, dx$$

$\downarrow$ $\hookrightarrow$ $z \le y$ e $0 \le z$

$y \le x$ e $0 \le y \rightarrow$ por dibujo/ecuaciones

Tiene el mismo valor que la original por Fubini

...esi

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y e^{x^3}\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x e^{x^3} z \Big|_0^y dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x e^{x^3} y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 e^{x^3} \int_0^x y\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 e^{x^3} \frac{y^2}{2} \Big|_0^x dx$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^3} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{6} \int_0^1 e^u \, du$$

$$u = x^3 \longrightarrow du = 3x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{6} \left[e^u \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} \left[e - 1 \right] //$$

Metodo 2 :

como de $\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3} dx\,dy\,dz$

tenemos

$0 \leq z \leq 1, \quad z \leq y \leq 1$

$y \leq x \leq 1$

$\Rightarrow$ Podemos considerar funciones inicatriz para cambiar el dominio de integración

definimos

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

así

$$\int_{y}^{1} e^{x^3}\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} e^{x^3} 1\!\!1_{\{y \leq x\}}\, dx$$

como $z \leq y \Rightarrow 0 \leq y$

$\therefore$ $0 \leq y \leq x$ y así no cambiamos el dominio que es no nulo.

esto

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_z^1 \int_0^1 e^{x^3} 1\!\!1_{\{y \le x\}}\, dx\,dy\,dz$$

ahora para $\int_z^1$ hacemos

lo mismo considerando

$1\!\!1_{\{z \le y\}}$ así la integral

$$\int_z^1 \int_0^1 e^{x^3} 1\!\!1_{\{y \le x\}}\, dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 e^{x^3} 1\!\!1_{\{y \le x\}} 1\!\!1_{\{z \le y\}}\, dx\,dy$$

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x^3} \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} \mathbb{1}_{\{z \leq y\}}\, dx\, dy\, dz$$

$$\underset{\text{Par fubini}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x^3} \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} \mathbb{1}_{\{z \leq y\}}\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \int_0^1 e^{x^3} \mathbb{1}_{\{z \leq y\}}\, dz\, dy\, dx$$

$\hookrightarrow$ ya que $y \leq x$

$$= \int_0^1 \int_0^x \int_0^y e^{x^3}\, dz\, dy\, dx$$

$\hookrightarrow$ ya que $z \leq y$

si recuperamos la misma integral que haciendo el metodo geometrico

3)

considere la función

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

y las integrales

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 g(x,y)\,dy\,dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 g(x,y)\,dx\,dy$$

Calcule I_1, I_2 ¿Contradice algún teorema visto en clase?

Indicación: puede ser útil considerar

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Observamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(y/x\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2}$$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\left[\frac{x^2+y^2-y[2y]}{[x^2+y^2]^2}\right]$$

$$= -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Scanned by CamScanner

así $g(x,y) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 g(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dy\, dx$$

$$= -\int_0^1 \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0^1 dx$$

$$= -\int_0^1 \left[-\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 dx$$

$$= -\int_0^1 -\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x)\Big|_0^1$$

$= \arctan(1) - \arctan(0)$

$= \frac{\pi}{2}$

ahora

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \, dx\, dy$$

$$= - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \, dx\, dy$$

$$\underset{\downarrow}{=} - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \, dx\, dy$$

f clase C^2

$$= - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\, dy$$

$= -\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0^1 \, dy$

asi que hay que calcular

$\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow$

$$I_2 = -\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^1 \, dy$$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \, dy$$

$= \arctan(x)\Big|_0^1$

$= -\frac{\pi}{2}$

así

$I_1 = \frac{\pi}{2}$, $I_2 = -\frac{\pi}{2}$

Pero lo único que hicimos fue intercambiar el orden de integración

$\therefore$ Por Fubini deberían ser iguales.

ahora fubini es cierto si las integrales interiores estan bien definidas como funciones y son integrables. es decir

$$x \longmapsto \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \quad (1)$$

$$y \longmapsto \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx$$

estan bien definidas. Pero en

(1) si $x = 0$

$$\int_0^1 \frac{-y^2}{y^4}\, dy = \int_0^1 -\frac{1}{y^2}\, dy = +\infty$$

Por criterio p de int.

así las integrales interiores
no estan bien definidas

$\therefore$ no se tiene Fubini

P4) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

Sean $a, b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a, b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left(\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)\,dx\right)$$

$$= f(b(\lambda),\lambda)\cdot b'(\lambda) - f(a(\lambda),\lambda)\cdot a'(\lambda)$$

$$+ \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,dx$$

Para demostrar lo anterior considere los siguientes pasos:

a) considere el caso particular en que a y b ctes. es decir pdq

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\int_0^b f(x,\lambda)\,dx\right)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,dx$$

Sol |

notamos

$$\int_a^b f(x,\lambda)\,dx$$

$$=\int_a^b\left[\int_0^\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,d\lambda - f(x,0)\right]dx$$

Ya que

$$\int_0^\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,d\lambda = f(x,\lambda)-f(x,0)$$

así

$$\int_a^b f(x,\lambda) = \int_a^b \int_0^{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\, d\lambda\, dx - \int_a^b f(x,0)\, dx$$

$$= \int_0^{\lambda} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\, dx\, d\lambda - \int_a^b f(x,0)\, dx$$

$\to f \in \mathcal{C}^1 \therefore$ usamos Fubini.

así

$$\frac{d}{d\lambda} \int_a^b f(x,\lambda)$$

$$= \frac{d}{d\lambda}\left(\int_0^{\lambda} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\, dx\, d\lambda \right) - \frac{d}{d\lambda} \int_a^b \cancel{f(x,0)\, dx}$$

$0 \to$ cte para λ

asi

$$\frac{d}{d\lambda}\int_a^b f(x,\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\int_c^{\lambda}\left[\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)dx\right]d\lambda$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)dx \quad / \text{ Por TFC}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\int_a^b f(x,\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)dx$$

//

b) considere la función

$$F(\lambda, y) = \int_c^y f(\lambda, x)dx \ , \ c \in \mathbb{R}$$

y utilizando lo anterior concluya lo pedido Hint: como $f \in \mathcal{C}^1$, F diferenciable asi notamos

$$\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)\,dx$$

$$= \int_{c}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)\,dx - \int_{c}^{a(\lambda)} f(x,\lambda)\,dx$$

$$= F(\lambda, b(\lambda)) - F(\lambda, a(\lambda))$$

a su vez para a

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, y) = \int_{c}^{y} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)\,dx$$

y por TFC

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\lambda, y) = f(\lambda, y)$$

$\Rightarrow$ para cadena tenemos

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x,\lambda)\,dx\right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, b(\lambda)) + \frac{\partial F}{\partial Y}(\lambda, b(\lambda)) \cdot b'(\lambda)$$

$$- \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda, b(\lambda)) - \frac{\partial F}{\partial Y}(\lambda, a(\lambda)) \cdot a'(\lambda)$$

$$= \int_{c}^{b(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\;,\;)\,dx + f(b(\lambda), \lambda) \cdot b'(\lambda)$$

$$- \int_{c}^{a(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,dx - f(a(\lambda), \lambda) \cdot a'(\lambda)$$

$$= \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x,\lambda)\, dx + f(b(\lambda),\lambda)\, b'(\lambda)$$

$$- f(a(\lambda),\lambda)\, a'(\lambda)$$

$$= f(b(\lambda),\lambda)\cdot b'(\lambda) - f(a(\lambda),\lambda)\, a'(\lambda) + \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\, dx \quad //$$

P5) Considere $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y acotada

Se define $I_f : H_+ \to \mathbb{R}$ como

$$I_f(x) = \int_{D(x)} f$$

donde $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$ y $D(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 \leq y_i \leq x_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$

El objetivo de este problema es demostrar que I_f es diferenciable y encontrar sus derivadas parciales. Para esto realice lo siguiente

a) Para $n=2$ calcule $\dfrac{\partial I_f}{\partial x_2}$

Sol,

notamos que

$D(x) = \prod_{i=1}^{n} [0, x_i]$ es decir

son rectangulos

$$\Rightarrow I_f(x) = \int_0^{x_n} \int_0^{x_{n-1}} \cdots \int_0^{x_1} f(y_1, \ldots, y_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

asi sea $n = 2$

$$I_f(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2$$

sea x_1 cte

$$\Rightarrow \int_0^{x_1} f(y_1, y_2)\, dy_1 = F(y_2)$$

asi como f continua F es derivable por TFC

$$\frac{\partial I_F}{\partial x_2} = \int_0^{x_1} f(y_1, x_2)\, dy_1$$

b) Pro ponga el valor de

$$\frac{\partial I_F}{\partial x_n} = \int_0^{x_{n-1}} \cdots \int_0^{x_{n-2}} \cdots \int_0^{x_1} f(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n)\, dy_1 \ldots dy_{n-1}$$

asi demostremoslo

en realidad si

$$F(y_n, y_{n-1}) = \int_0^{x_{n-2}} \int_0^{x_{n-3}} \cdots \int_0^{x_1} f(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)\, dy_1 \ldots dy_{n-2}$$

para $(x_1, \ldots, x_{n-2})$ fijo lo reducimos a $n=2$ y concluimos como en la parte a)

c) justifique porque al saber $\frac{\partial I_F}{\partial x_n}$ en realidad sabemos cuanto vale $\frac{\partial I_F}{\partial x_i}$ con $i=1,\dots,n$

Recuerde algun teorema visto en clase

Sol

Por Fubini podemos intercambiar el orden de integración así podemos remplazar n con i

$$\Rightarrow \frac{\partial I_F}{\partial x_i} = \int_0^{x_n} \cdots \int_0^{x_{i+1}} \int_0^{x_{i-1}} \cdots \int_0^{x_1} f(y_1,\dots,x_i,\dots,y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \quad //$$

d) justifique porque

$\frac{\partial I_f(x)}{\partial x_n}$ son continuas

Sol

como f continua

$\Rightarrow \int_0^{x_i} f(y_1,\dots,y_n)\,dy_i$ es derivable $\forall i$

$\Rightarrow$ es continua $\forall i$

así

$$\frac{\partial I_f}{\partial x_i} = \int_0^{x_n}\cdots\int_0^{x_{i+1}}\int_0^{x_{i-1}}\cdots\int_0^{x_1} f(y_1,\dots,x_i,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n$$

es continua //

e) concluya lo pedido

Sol)

las derivadas parciales

son continuas

$\Rightarrow I_f$ es dif.

f) a partir de lo anterior calcule

$$\frac{\partial^n I_f(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$

Sol)

$$\frac{\partial I_f(x)}{\partial x_n} = \int_0^{x_{n-1}} \cdots \int_0^{x_1} f(y_1 \ldots, y_{n-1}, x_n)\, dy_1 \ldots dy_{n-1}$$

Y si hacemos $\frac{\partial^2 I_F}{\partial x_{n-1}\partial x_n}$

hay que volver a derivar el ultimo termino

$$\frac{\partial I_F}{\partial x_{n-1}\partial x_n} = \int_0^{x_{n-2}} \cdots \int_0^{x_1} f(y_1 \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dy_1 - dy_{n-2}$$

asi repitiendo el proceso

$$\frac{\partial^n I_F}{\partial x_1 - \partial x_n} = f(x)$$

P6] Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^2$

El objetivo de este problema es demostrar el teorema de las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

utilizando Fubini. Para ello

a) Defina la función

$$g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Pruebe que g es integrable sobre un rectangulo $R = [a \times b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$

al son $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ son continuas

$\Rightarrow$ g es continua

$\Rightarrow$ g es integrable en R

por too visto en catedra //

b) Demuestre que una funcion continua es nula ssi su integral sobre cualquier rectangulo es nula

sol)

$\boxed{\Rightarrow}$ como f es nula $\int_R f = 0$

$\forall R$ rectangulo

[⇐] sea f continua y con integral nula sobre cualquier rectangulos

Si $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q

$f(\bar{x}) \neq 0$

$\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q

$|x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \quad |f(\bar{x})| \leq \varepsilon + |f(x)|$

$\Rightarrow$

Sea R rectangulo.

$$\int_R f(\bar{x}) \leq \int_R \varepsilon + \int_R f(x)$$

$\Rightarrow \int_R f(x) = 0$ por hip.

así $\int_R f(\bar{x}) \leq \int_R \varepsilon$

$= \varepsilon \cdot Vol(R)$

a su vez

$\int_R f(\bar{x}) = f(\bar{x}) Vol(R)$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \cdot Vol(R) \leq \varepsilon \cdot Vol(R)$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \leq \varepsilon$

a su vez podemos hacer el mismo proceso intercambiando $\bar{x}, x$ i.e

$f(x) \leq \varepsilon + f(\bar{x})$

$\Rightarrow -\varepsilon \leq f(\bar{x})$

así $|f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

para otro lado $|f(\bar{x})| \neq 0$

$\Rightarrow 0 < |f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

entonces

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |\bar{x} - x| \leq \delta, 0 < |f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

así $\varepsilon = \dfrac{|f(\bar{x})|}{2}$

$\Rightarrow 1 \leq \dfrac{1}{2} \rightarrow \in$

$\therefore |f \equiv 0$

c) Concluya lo pedido

Sol)

$$\int_c^d \int_a^b g(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_c^d \int_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \right) dx\,dy$$

$$= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,dx\,dy - \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,dx\,dy$$

$$= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big|_a^b dx\,dy - \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,dx\,dy$$

$$= \int_c^d \left[\frac{\partial f}{\partial y}(b,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,y) \right] dy - \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,dx\,dy.$$

$$= \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(b,y)\,dy - \int_c^d \frac{\partial f}{\partial y}(a,y)\,dy$$

$$- \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,dx\,dy$$

Scanned by CamScanner

$$= f(b,y)\Big|_c^d - f(a,y)\Big|_c^d - \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= f(b,d) - f(b,c) - [f(a,d) - f(a,c)]$$

$$- \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c)$$

$$- \left[\int_a^b \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\,dy\,dx \right]$$

$$= f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c) - \left[\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Big|_c^d dx \right]$$

$$= f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c) - \left[\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,c)\,dx \right]$$

$$= f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c) - \left[f(x,d)\Big|_a^b - f(x,c)\Big|_a^b \right]$$

$$= f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c) - [f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c)]$$

$$= 0$$

esto fue para todo $R = [a,b] \times [c,d]$

$\Rightarrow g \equiv 0$ asi tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$