MA2001-5 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ángel Pardo.
Auxiliar: Felipe Lopecillo Rocabado y Sebastián Bustos

Auxiliar 11

P1. ***Multiplicadores de Lagrange - Resuelva***

Sea

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 1\}$$

y la función

$$f(x) = ||x||_2^2$$

Usando los criterios vistos en clase, encuentre el punto x_0 que minimiza la función f en el conjunto C. ¿Es global? ¿Es único?

P2. ***Teorema de la función implicita***

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $g : U \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1(U)$. Consideremos el conjunto de nivel $c \in \mathbb{R}$ de g, es decir,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = c\} = g^{-1}(\{c\})$$

Sea $x^* \in S$ tal que $\frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*) \neq 0$. Dado $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle \nabla g(x^*), v\rangle = 0$, probaremos que exsite un $\epsilon > 0$ y una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha(t) &\in S \ \forall t \in (-\epsilon, \epsilon) \\ \alpha(0) &= x^* \\ \alpha'(0) &= v \end{aligned}$$

Para ello, procedemos como sigue:

a) Pruebe que existen abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ y $W \subseteq \mathbb{R}$ y una función $\phi : U \to W$ tal que ϕ es de $\mathcal{C}^1(U)$ y

$$g(x_1, ..., x_n) = c \iff x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1})$$

donde $x = (x_1, ..., x_n) \in U \times W$. Dicho de otro modo, localmente en x^*, S es el grafo de una función de clase C^1

b) Dado $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\langle \nabla g(x^*), v\rangle = 0$, defina

$$\alpha_1(t) = (x_1^* + tv_1, ..., x_{n-1}^* + tv_{n-1})$$

y considere

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \phi(\alpha_1(t)))$$

Pruebe que α es la curva buscada, es decir, satisface las condiciones del sistema descrito.

Nota: Recordemos que el plano tangente $T_{x^*}S$ al conjunto de nivel S en el punto x^* tiene como vector normal a $\nabla g(x^*)$, es decir, $T_{x^*}S = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g(x^*), v\rangle = 0\}$. El resultado de este problema puede describirse como la siguiente frase: el plano tangente a la superficie de nivel S en el punto x^* coincide con los vectores de velocidad de curvas sobre S que pasan por x^*.

P3. ***Multiplicadores de Lagrange***

Usted se encuentra caminando por un parque cuando en la lejanía divisa al más tierno ejemplar de su animal favorito tomando una siesta. A un costado, observa que se extiende un bosque cuyo linde (o borde) traza una curva de ecuación $g(x, y) = 0$. En los árboles de este bosque crecen los más exóticos y variados frutos entre los cuales se encuentra el preferido del animal en cuestión; para sorprenderlo, usted decide ir hasta el bosque a coger uno de estos frutos para luego regalárselo. Pero, dado que podría despertar e irse en cualquier momento usted decide que debe encontrar la forma más rapida de hacer el viaje primero **hasta el límite del bosque y luego al animal.**

Suponga que el parque es completamente plano y que el tiempo que tomará recoger el fruto es despreciable en comparación a lo que tomará el trayecto, es decir usted puede tomar el alimento instantaneamente. Note además que sin perdida de generalidad puede suponer que al momento de divisar al animal usteed se encuentra en el orgien y que éste tiene coordenadas (x_a, y_a).

a) Escriba el problema de optimización con restriciones que debe resolver para encontrar la forma más rapida de hacer el recorrido (Indicación: Optimice distancias al cuadrado).

b) Suponga ahora que el borde del bosque es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

1) Pruebe que los puntos críticos del problema se encuentran sobra la recta que pasan por el origen y el punto (x_a, y_a)

2) Usando la parte (i) determine los puntos críticos del problema. Evaluando la función objetivo en estos puntos, muestre que el óptimo tiene coordenadas

$$x^* = \frac{rx_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}} \; y^* = \frac{ry_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$$

P4. ***Más función implicita***

a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, $f(x, y) = 0$ y $J_y f(x, y)$ es invertible. Muestre que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. En termodinamica se utliza la notación:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\right)_{y,z}$$

Para representar que es la derivada de f con respecto a x, considerando a y, z constantes con respecto a x. Lo anterior cobra sentido cuando se cumplen relaciones como $PV = nRT$ donde se tiene que todas las variables son dependientes entre si.

Demuestre, bajo la notación anterior, que si $f(x, y, z) = 0$, $J_x f(x, y, z) \neq 0$,$J_y f(x, y, z) \neq 0$, $J_z f(x, y, z) \neq 0$ entonces:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}(y, z)\right)_z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}(x, z)\right)_x = -1$$

La anterior es llamado la regla ciclica. Verifique que se cumple para: $PV = nRT$ donde P, V, T son variables y n, R son contstantes.

P5. ***Un poco de ecuaciones funcionales***

Sea $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz tal que $A_{i,j} = (a_{ij})$ donde $det(A(t)) \neq 0 \forall t$ y $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea $b_1, ..., b_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Todas de clase $\mathcal{C}^1$. Muestre que si $s_1(t), ..., s_n(t)$ son solución del siguiente sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) s_j(t) = b_i(t) \; \forall i = 1, .., n$$

Entonces s_i es una función de clase $\mathcal{C}^1$ y encuentre explicitamente s_i' para todo i.