

P1/

Sea

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \geq 1\}$$

y la función

$$f(x) = \|x\|_2^2$$

Usando los criterios
vistos en clases encuentre
el punto x_0 que minimiza
la función f en el
conjunto C . ¿es global?
¿es único?

Sol,

notamos $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

assim buscamos resolver

$$\min f(x)$$

sa

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq 1$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

escribimos el problema

em 2 partes.

1) em um conjunto aberto

$int(c)$ donde podemos

Usar las caracterizaciones de optimalidad

2) igualdad, donde podemos usar la grange.

1) buscaremos

$$\min F(x)$$

sa

$$\sum_{i=1}^3 x_i > 1$$

así las restricciones
están en un conjunto
abierto, $\therefore$ usamos

$$\nabla f = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n x_j^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} x_j^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x_i = 0$$

$$\Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i$$

$$\text{así } x_0 = (0, \dots, 0)$$

$$\underline{\text{pero}} \sum_{i=1}^n (x_0)_i = 0 \neq 1$$

$\therefore x_0$ no es solución del problema

tema. asi de alcanzar
max/min en C lo va a ser
en su frontera

$$\Rightarrow \min \sum_{i=1}^n x_i^2$$

sa

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$\Rightarrow$

$$\min f(x)$$

sa

$$g(x) = 0$$

$$\text{donde } g(x) = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$$

as i definimos

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{j=1}^n x_j^2 + \lambda \left[1 - \sum_{j=1}^n x_j \right]$$

lagrangiana

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 2x_i - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2x_i \quad \forall i$$

$$\Rightarrow x_i = cte = \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{also } \forall x \quad q(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \frac{n}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{n}$$

$$x_0 = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \in C$$

así x_0 es óptimo de la función. Para ver que naturalmente calculamos $Hf(x_0)$

ahora $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 2$$

y no es difícil convencerse que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$\Rightarrow Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \forall x \in \mathbb{C}$$

así se tiene que

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

x_0 es mínimo ya que $Hf(x_0)$ es definida positiva.

ahora Para saber si es mínimo local o global, único o no estudiamos la convexidad de f .

Como Hf es cte

HF es def-positiva

$\Rightarrow f$ es estrictamente
convexa

$\Rightarrow x_0$ es mínimo global y
es único.

pero lo anterior es

valido solo si el conjunto
de estudio es convexo

ya que una función convexa

solo esta definida en

conjuntos convexos

pd q

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \geq 1 \}$$

es convexo

ie

pd q

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

$$\text{Sea } x, y \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \text{ est. q}$$

$$\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i)$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^n x_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\begin{aligned} &= \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 \quad // \quad x, y \in C \\ &= \lambda + 1 - \lambda \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C //$$

$$\Rightarrow C \text{ es convexo}$$

$$\Rightarrow x_0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \text{ es}$$

mimimo global único

2] Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y

$g: U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1(U)$. Consideremos el conjunto

de nivel $c \in \mathbb{R}$, es decir

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = c\}$$

Sea $x^* \in S$ t.q. $\frac{\partial g}{\partial x_n} \neq 0$

Dado $v \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\langle \nabla g(x^*), v \rangle = 0$

Probaremos que $\exists \epsilon > 0$ y

una curva $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$
de clase C^1 t.q.

$$\alpha(t) \in S \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$$

$$\alpha(0) = x^*$$

$$\alpha'(0) = v$$

para ello, procedemos como sigue

a) Pruebe que existen abiertos
 $V \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ y $W \subseteq \mathbb{R}$ y una
función $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ t.q
 $\phi \in C^1(V)$ y

$$g(x_1, \dots, x_m) = c$$

ssi

$$x_m = \phi(x_1, \dots, x_{m-1})$$

donde $x = (x_1, \dots, x_m) \in U \times W$

Sol

como $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ es C^1

$$\text{y } g(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) = c$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_m}(x^*) \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{si } f(x) = g(x) - c$$

$$f \in \mathcal{C}^1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \neq 0 \quad \gamma$$

$$f(x^*) = 0$$

asi por TFI

$$\exists U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}, \quad w \subseteq \mathbb{R} \text{ abiertos}$$

$$\text{com } (x_1^*, \dots, x_{n-1}^*) \in U, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\phi: U \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \quad \phi \in \mathcal{C}^1(U)$$

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$$

$$f(x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$$

es decir

$$x_m = \phi(x_1, \dots, x_{m-1})$$

ssi

$$g(x_1, \dots, x_m) = c$$

b) Dado $v \in \mathbb{R}^n$ t.q

$$\langle \nabla g(x^*), v \rangle = 0 \text{ defina}$$

$$\alpha_1(\lambda) = (x_1^* + \lambda v_1, \dots, x_{m-1}^* + \lambda v_{m-1})$$

y considere

$$\alpha(\lambda) = (\alpha_1(\lambda), \phi(\alpha_1(\lambda)))$$

Sol

Прітємо mostremos que

$$\alpha_1(x) \in S \quad \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

W es abierto :

$$\forall x \in W \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.q.} \quad B(x, \delta) \subseteq W$$

$$\text{Sea } (x_1^*, \dots, x_{m-1}^*) \in W \text{ [Punto]}$$

$$\Rightarrow \text{mostremos que } \alpha_1(x) \in B(x, \delta)$$

para ε conveniente

$$\Rightarrow \| (x_1^*, \dots, x_{m-1}^*) - (x_1^* + \lambda v_1, \dots, x_{m-1}^* + \lambda v_{m-1}) \|_2$$

$$= \| (\lambda v_1, \dots, \lambda v_{m-1}) \|_2$$

$$= |\lambda| \| (v_1, \dots, v_{m-1}) \|$$

si $\|(v_1, \dots, v_{m-1})\| = 0$ no hay nada que mostrar y a la

$$\alpha_1(\lambda) = (x_1^*, \dots, x_{m-1}^*) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \alpha(\lambda) = x^* \Rightarrow \alpha'(\lambda) = 0$$

$$\forall \langle \nabla g(x^*), v \rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial g(x^*)}{\partial x_m} v_m = 0 \Rightarrow v_m = 0 \Rightarrow v = 0$$

y cumpliendo //

Si $\|(v_1, \dots, v_{m-1})\| \neq 0$

$$\Rightarrow \text{si } |\lambda| \leq \frac{\delta}{\|(v_1, \dots, v_{m-1})\|}$$

$$\alpha_1(\lambda) \in B(x, \delta)$$

$$\Rightarrow \alpha_1(\lambda) \in W \Rightarrow \phi(\alpha_1(\lambda)) = x_m(\pi)$$

$$\Rightarrow \alpha(\lambda) = (\alpha_1(\lambda), \phi(\alpha_1(\lambda))) \in S$$

$$P \cap T \neq \emptyset //$$

$$\text{asi } \varepsilon = \frac{\delta}{\| (v_0, \dots, v_{n-1}) \|}$$

$$\| (v_0, \dots, v_{n-1}) \|$$

anora

$$\alpha_1(0) = (x_1^*, \dots, x_{n-1}^*)$$

$$\Rightarrow \alpha(0) = (C x_1^*, \dots, x_{n-1}^*, \phi(x_1^*, \dots, x_{n-1}^*))$$

$$= (x_1^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n^*)$$

↳ part 1 & 2

$$\Rightarrow \alpha(0) = x^*$$

part 1 & 2

$$\alpha(\lambda) = (\alpha_1(\lambda), \phi(\alpha_1(\lambda)))$$

$$\begin{aligned} \alpha'(\lambda) &= (\alpha_1'(\lambda), \nabla \phi(\alpha_1(\lambda)) \circ \alpha_1'(\lambda)) \\ &\downarrow \\ &= (v_1, \dots, v_{n-1}, \nabla \phi(\alpha_1(\lambda)) \cdot \alpha_1'(\lambda)) \end{aligned}$$

$$a \in \Pi a \quad \phi(x) \in T \cdot g$$

$$g(x, \phi(x)) = c$$

$$\Rightarrow g(x_1, \dots, x_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_{n-1})) = c$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i=1, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_m}}$$

$$\Rightarrow \nabla \phi \cdot \alpha_1'(\lambda)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \cdot V_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \cdot V_2 + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial x_{m-1}} \cdot V_{m-1}$$

$$= - \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x_m}} \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} \cdot V_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_{m-1}} \cdot V_{m-1} \right]$$

$$= - \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x_m}} \left[\nabla g \cdot V - \frac{\partial g}{\partial x_m} V_m \right]$$

Si evaluamos en $t=0$

$\Rightarrow$

$$\nabla \phi(x_1^*, \dots, x_{n-1}^*) \cdot \alpha_1'(0)$$

$$= -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*)} \left[\nabla g(x^*) \cdot v^0 - \frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*) \cdot v_n \right]$$

$$= v_n$$

$$\Rightarrow \alpha_1'(0) = (v_n, \dots, v_{n-1}, v_n)$$
$$= v //$$

P3 | usted se encuentra
caminando en un parque
cuando en la lejanía divisas
al más tierno ejemplar
de su animal favorito.
tomando una siesta. A un
costado, observa que se extiende
un bos que cuyo límite
(o borde) traza una curva
de ecuación $g(x,y)=0$. En los
árboles de este bos que crecen
los más exóticos y variados
frutos entre los cuales se
encuentra el preferido
del animal en cuestión;

Para sorprenderlo, usted
decide ir hasta el bosque
y coger uno de estos
frutos para luego regalárselo.
Pero, dado que podría despen-
tarse e irse en cualquier
momento usted decide
que debe en contrar
la forma mas rápida
de hacer el viaje primero
hasta el límite del bosque
y luego al animal.

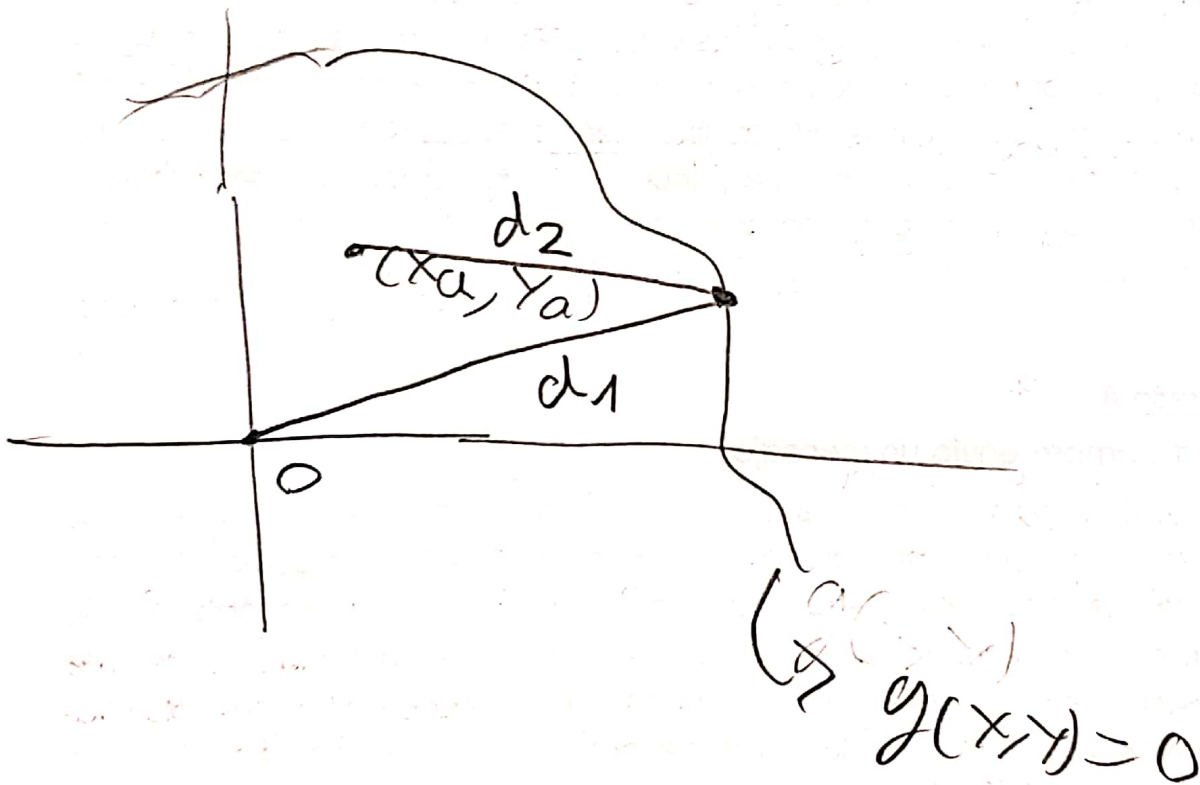
Suponga que el papave
es completamente plano
y que el tiempo que

Томара' перо ел
Фрuto ес деспрециабле ен
Компарацион ало же Томара' ел
трахесто, ес деси' устед
ло Puede томар инстан-
таменте. Note адема
же син perdida де генералidad
Puede супонер же ал моменто
де дивиса' ал ани'мал
устед се енуентра ен
ел епиген у ел ани'мал
тиене координадас (ха, ха)

a) Ес criba ел Проблема
де оптимизацион ком
рестриcciones же де бе

resolver para encontrar la
forma más rápida de hacer
el recorrido

Sol necesitamos minimizar
el tiempo $\Leftrightarrow$ minimizar la
distancia [asumiendo $v = \text{cte}$]



$$d_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2}$$

$$\text{con } g(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \min_{(x,y)} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2}$$

sa

$$g(x,y) = 0 //$$

b) Suponga ahora que el borde es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$

sólo

i) Pruebe que los puntos críticos del problema

Se encuentran sobre la recta que pasan por el origen y el punto (x_a, y_a)

Sol

ahora $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$

así

$$\min_{x, y} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2}$$

sa. $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

$\Rightarrow$

(Por indicación)

$$\min_{(x,y)} x^2 + y^2 + (x-x_a)^2 + (y-y_a)^2$$

sa

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

asi calculamos

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda)$$

$$= x^2 + y^2 + (x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - r^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x + 2(x - x_a) + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y + 2(y - y_a) + 2\lambda y = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 2x_a + 2\lambda x = 0$$

$$4y - 2y_a + 2\lambda y = 0$$

ahora como $x^2 + y^2 = r^2$

$$\Rightarrow x \neq 0 \text{ o } y \neq 0$$

Por Simetría Solovemos
 $x \neq 0$

$$\Rightarrow 2\lambda = - \frac{[-2x_a + 4x]}{x} \text{ en } (1)$$

$$\Rightarrow 4y - 2y_a + \frac{[-2x_a + 4x]}{x} y = 0$$

$$\Rightarrow 4yx - 2y_a x - [-2x_a + 4x]y = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{4x}x - 2y_a x + 2x_a y + \cancel{4x}y = 0$$

$$\Rightarrow x_a y = x y_a$$

$$\Rightarrow y = \frac{y_a}{x_a} x \quad \text{así es la recta}$$

↓
si $x_a \neq 0$

que pasa por el origen
y por (x_a, y_a) .

$$\text{Si } x_a = 0 \Rightarrow 0 = x y_a$$

así $(0, y_a)$ cumple la ecuación
y concluimos igualmente //

ii) determinar los puntos
críticos del problema.

Y evaluando la función objetivo
en estos puntos, mostraremos
que el óptimo es

$$x^* = \frac{\pi x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}, \quad y^* = \frac{\pi y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$$

sol)

Sabemos que

$$y = \frac{y_a}{x_a} x$$

$$\Rightarrow \left[\frac{y_a x}{x_a} \right]^2 + x^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 [y_a^2 + x_a^2]}{x_a^2} = R^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{R^2 x_a^2}{[y_a^2 + x_a^2]}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{\pi x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{\pi y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$$

reemplazando en la función objetivo

Para $\oplus$, $x = \frac{\pi x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$
 $y = \frac{\pi y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2$$

$$= \pi^2 + \left(\frac{\pi x_a - x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}} \right)^2 + \left(\frac{\pi y_a - y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}} \right)^2$$

$$= \pi^2 + x_a^2 \left[\frac{\pi}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}} - 1 \right]^2 + y_a^2 \left[\frac{\pi}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}} - 1 \right]^2$$

$$= \pi^2 + (x_a^2 + y_a^2) \left[\frac{\pi - \sqrt{x_a^2 + y_a^2}}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}} \right]^2$$

$$= \pi^2 + \left[\pi - \sqrt{x_a^2 + y_a^2} \right]^2$$

Para el otro caso no es
difícil convencerse de que

$$= \pi^2 + \left[-\pi - \sqrt{x_a^2 + y_a^2} \right]^2$$

así bastaba que

$$\left[-\pi - \sqrt{x_a^2 + y_a^2}\right]^2 \geq \left[\pi - \sqrt{x_a^2 + y_a^2}\right]^2$$

para que lo pedido se cumpla

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi^2 + 2\pi\sqrt{x_a^2 + y_a^2} + x_a^2 + y_a^2 \\ \geq \pi^2 - 2\pi\sqrt{x_a^2 + y_a^2} + x_a^2 + y_a^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{\pi x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}, \quad y^* = \frac{\pi y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2}}$$

son óptimos

P4)

a) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$

t.q $f(x,y)=0$ y $J_y f(x,y)$ es invertible p.d.q

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

sol) como $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

que $J_y f(x,y)$ es invertible

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$$

а тогда по лемме $\exists \phi \in C^1$

$$F(x, \phi(x)) = 0 \quad \forall x$$

$$y = \phi(x) \quad y \in C^1 : \frac{dy}{dx} \text{ exists}$$

$$F(x, y(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} [F(x, y(x))] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$= 0$$

así como $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

obs se usa en economía.

b) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 .

En termodinámica se utiliza la notación

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} (x, y, z) \right)_{y, z}$$

Para representar que es la derivada de f con respecto a x considerando a y, z como constantes con respecto a x . Lo anterior cobra sentido cuando se emplean relaciones como $PV = MRT$ donde se tiene que todas las variables de ponderan entran en S_i .

Demuestre, bajo la notación anterior, que si $F(x, y, z) = 0$

$$J_x F(x, y, z) \neq 0, J_y F(x, y, z) \neq 0$$

$$J_z F(x, y, z) \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = -1$$

Lo anterior es llamado

Regla Cíclica. Verifique

que se cumple para

$PV = nRT$ donde P, V, T son variables y n, R ctes.

Sol

Por las hip. se pueden
despejar las variables
en función de las otras

$$\Rightarrow x = x(z, y)$$

$$\Rightarrow f(x(z, y), y, z) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} [f(x(z, y), y, z)] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

↓
z es variable indep

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

por otro lado

$$z = z(x, y)$$

$$\Rightarrow f(x, y, z(x, y)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y, z(x, y))] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = 0$$

$\hookrightarrow y$ como
variable
indp.

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Portviamo

$$y = y(x, z)$$

$$\Rightarrow f(x, y(x, z), z) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} [f(x, y(x, z), z)] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

↳ x variable
ind

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x =$$

$$= - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \cdot - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \cdot - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

// - - -

si $PV = nRT$

$$\Rightarrow x = P, y = V, z = T$$

asi

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -1$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{nRT}{V^2}$$

$$T = \frac{PV}{nR} \rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{nR}$$

$$V = \frac{n R T}{P} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{n R}{P}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$= \frac{-n R T}{V^2} \cdot \frac{V}{n R} \cdot \frac{n R}{P}$$

$$= - \frac{n R T}{P V} \quad , \quad \begin{array}{l} \text{Como} \\ P V = n R T \\ \frac{n R T}{P V} = 1 \end{array}$$

$$= -1 //$$

[5]

Sea $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz

T.q. $A_{ij} = (a_{ij})$ donde $|A(\lambda)| \neq 0$

$a_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

todas de clase $\mathcal{C}^1$.

Muestre que si $s_1(\lambda), \dots, s_n(\lambda)$

son solución de

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda) s_j(\lambda) = b_i(\lambda) \quad \forall i \in 1, \dots, n$$

$\Rightarrow s_i \in \mathcal{C}^1 \quad \forall i$, y encuentre
explícitamente s_i

solución el sistema
anterior lo escribimos
como

$$A(x)S(x) = B(x)$$

donde $A_{ij} = a_{ij}$

$$S_i = (s_{i1}(x), \dots, s_{in}(x))^T$$

$$B = (b_1(x), \dots, b_n(x))^T$$

Ahora definimos

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

como

$$F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = A(x) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} - B(x)$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F(\lambda, \lambda) = A(\lambda) \cdot \lambda - B(\lambda)$$

ahora

sea $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow F(\lambda, \lambda^*) = 0$$

$$\text{donde } \lambda^* = (S_1(\lambda), \dots, S_m(\lambda))$$

así vez

$$J_{\lambda} F = A$$

$$\Rightarrow |J_{\lambda} F| = |A| \neq 0$$

si $P \cap T \neq \emptyset$

$\exists! \lambda: W \rightarrow V$ t.g

$F(\lambda, \lambda(x)) = 0$, donde W
es un abiente en T en $\lambda(x)$.
esto es valido $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Por unicidad de las soluciones
podemos decir que

$$\lambda(x) = (s_1(x), \dots, s_m(x))$$

ya que solucionan en $\forall x \in \mathbb{R}$

asi $s_i(x) \in \mathbb{R}^1 \quad \forall i$

y su derivada es:

$$S'(x) = - [J_S(x)]^{-1} J_x(x) F$$

Obs : normalmente es

solo en un punto el

resultado, pero en nuestra

caso $\forall x \in \mathbb{R}$ es valido

$$J_S F = A$$

$$J_x F = A' \cdot S - B'$$

$$\Rightarrow S'(x) = -A^{-1}(x) [A'(x) \cdot S(x) - B'(x)]$$

y así se tiene la fórmula para
los S_i